

Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2013

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
Л27

Перевод с белорусского языка *Л. В. Латотиной*

Рецензенты: кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук доцент *Ю. Д. Чурбанов*); методист высшей категории отдела общеобразовательных дисциплин государственного учреждения дополнительного образования взрослых «Витебский областной институт развития образования» *Т. Т. Талькова*; учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Миорская средняя школа № 1» *И. А. Ханецкая*

Латотин, Л. А.

Л27 Математика : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский; пер. с белорус. яз. Л. В. Латотиной. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. — 408 с. : ил.

ISBN 978-985-471-591-9.

Предыдущее издание под названием «Математика, 11» вышло в 2007 г.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-471-591-9

- © Латотин Л. А.,
Чеботаревский Б. Д., 2007
- © Латотин Л. А.,
Чеботаревский Б. Д., 2013,
с изменениями
- © Латотина Л. В., перевод
на русский язык, 2013
- © Оформление. РУП «Издательство
“Адукацыя і выхаванне”», 2013

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"

Дорогие друзья!

В десятом классе вы продолжите изучение математики, а также начнёте изучение геометрии пространства — стереометрии. Вы познакомитесь с одним из важнейших понятий математики — понятием производной, имеющим самые широкие применения. Вам нужно будет усвоить многие формулы и алгоритмы. Важно, чтобы вы их не только запомнили, но за формальными действиями не забывали их смысл, представляли, на решение каких вопросов эти действия направлены.

Организация учебного пособия такая же, как и в предыдущих классах. Каждый параграф начинается с обсуждения вопроса, обозначенного в названии параграфа. Наиболее важное выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **полужирным шрифтом**, правила и утверждения — **полужирным курсивом**, а понятия и факты, на которые стоит обратить внимание, но необязательно запоминать, — *курсивом*. Материал, не предназначенный для обязательно-го контроля, помещён между специальными знаками ► ◄.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, отмеченные знаком . Они предназначены для проверки того, как вы усвоили содержание объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы.

Упражнения первой группы посвящены тем вопросам, которые обсуждались в объяснительном тексте. Они имеют в основном тренировочный характер, хотя среди них могут встретиться и более сложные.

Вторую группу после разделительной горизонтальной черты составляют разнообразные упражнения на повторение. При их выполнении вам нужно будет применить знания, полученные ранее, в том числе и в предыдущих классах.

Задачи третьей группы, идущие после трёх разделительных звёздочек, являются в чём-то нестандартными. Они потребуют творческих подходов, самостоятельности в рассуждениях. Вместе с тем для их решения у вас достаточно знаний.

Желаем вам успехов!

Авторы

I раздел

Введение в стереометрию

1. Пространственные фигуры

Вы знаете, что геометрические фигуры делятся на **плоские** и **пространственные** в зависимости от того, все или не все точки фигуры принадлежат одной плоскости. Плоские фигуры вы изучали в предыдущих классах, там вы познакомились и с некоторыми пространственными фигурами — призмой (рис. 1), пирамидой (рис. 2), цилиндром (рис. 3), конусом (рис. 4), шаром (рис. 5). Раздел геометрии, в котором изучаются плоские фигуры, называется *планиметрией*, а раздел, в котором изучаются пространственные фигуры, — *стереометрией*.

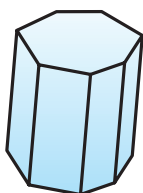


Рис. 1

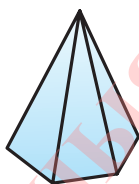


Рис. 2

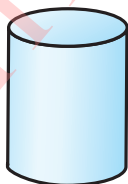


Рис. 3

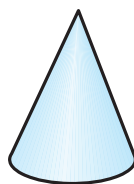


Рис. 4

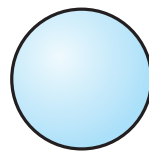


Рис. 5

Ту или иную пространственную фигуру приходится изображать на плоскости листа в тетради или на плоскости доски. Соответствующий рисунок выполняют так, чтобы он создавал такое представление, как и сама изображаемая фигура. При этом линии, которые не видны, делают *штриховыми*.

На рисунке 6 изображён параллелограмм $ABCD$ и треуголь-

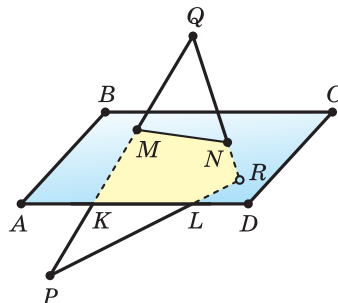


Рис. 6

ник PQR , которые пересекаются по отрезку MN . Часть QMN треугольника PQR находится над параллелограммом $ABCD$, часть $PMNR$ — под этим параллелограммом. При этом часть PKL четырёхугольника $PMNR$ видна, а часть $KMNR$ — не видна. Обращаем внимание на то, что точки K и L треугольника PQR не принадлежат параллелограмму $ABCD$, а значит, и его стороне AD .

На рисунке 7 изображена треугольная пирамида $DABC$, которую пересекает плоскость по четырёхугольнику $MNOP$. При этом у пирамиды невидимым является ребро AB , а у сечения $MNOP$ — его стороны NO и MP .

Представление пространственной фигуры на рисунке называют **изображением фигуры**.

Важным классом пространственных фигур являются многогранники.

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Эти многоугольники называются **гранями** многогранника, их вершины — **вершинами** многогранника, а стороны — **рёбрами** многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника (рис. 8).

Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости любой его грани. На рисунке 9 изображён невыпуклый многогранник.

Мы будем изучать простейшие выпуклые многогранники — призмы и пирамиды.

Призмой называется многогранник, две грани которого — равные n -угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

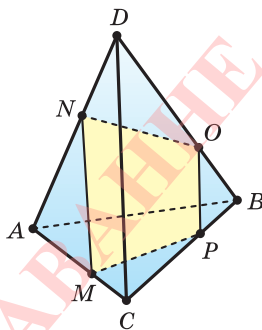


Рис. 7

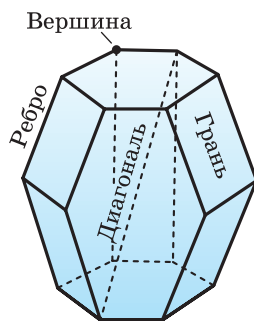


Рис. 8

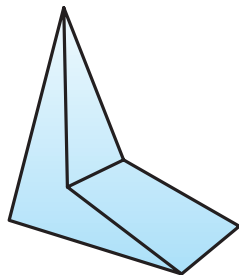


Рис. 9

Равные грани-многоугольники призмы называются её **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями**. Рёбра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами призмы** (рис. 10).

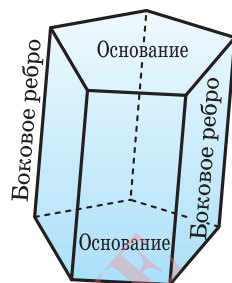


Рис. 10

В зависимости от количества сторон основания призмы отличают **треугольную, четырёхугольную, пятиугольную** и т. д. призмы. На рисунке 11 изображена шестиугольная призма.

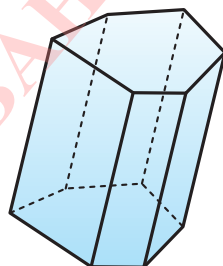


Рис. 11

Призмы разделяются на *прямые* и *наклонные* в зависимости от того, перпендикулярны или не перпендикулярны рёбрам оснований боковые рёбра призмы.

Обычно при изображении прямой призмы её боковые рёбра проводят вертикально (рис. 12). Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания являются правильными многоугольниками.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом**.

Параллелепипед, как призма, может быть и прямым (рис. 13), и наклонным (рис. 14).

Прямой параллелепипед, основания которого являются прямоугольниками, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

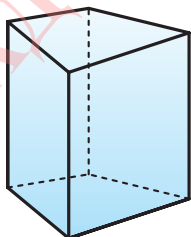


Рис. 12

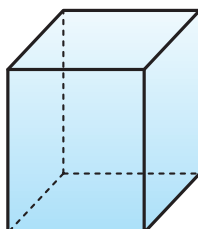


Рис. 13

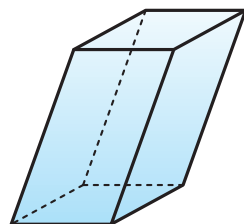


Рис. 14

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом**.

Все грани куба — равные друг другу квадраты.

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные являются треугольниками с общей вершиной.

На рисунке 15 изображена пирамида $TABCDE$. Многоугольник $ABCDE$ называют **основанием пирамиды**, треугольные грани ATB , BTC , CTD , DTE , ETA — **боковыми гранями**, а общую вершину T боковых граней — **вершиной пирамиды**.

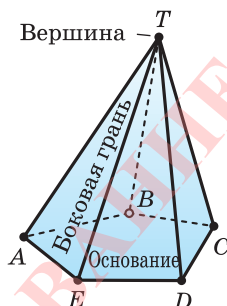


Рис. 15

В зависимости от количества сторон основания пирамиды отличают **треугольную, четырёхугольную, пятиугольную** и т. д. пирамиды. Пирамида на рисунке 15 — пятиугольная, а на рисунке 16 — треугольная.

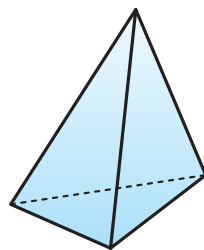


Рис. 16

Пирамида, основание которой — **правильный многоугольник**, а отрезок, соединяющий её вершину с центром основания, перпендикулярен любой прямой, проведённой в плоскости основания через этот центр, называется **правильной**.

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется **апофемой** пирамиды.

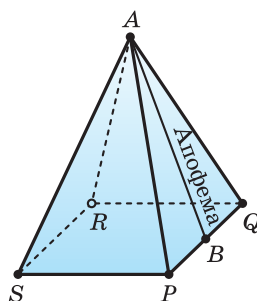


Рис. 17

На рисунке 17 изображена правильная четырёхугольная пирамида $APQRS$; отрезок AB — одна из её апофем.

Теорема 1. У правильной пирамиды равны её:

а) боковые рёбра; б) боковые грани; в) апофемы.

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида и точка O — центр её основания (рис. 18).

а) Отрезки $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ равны, так как являются радиусами описанной около основания окружности. Прямоугольные треугольники $OQA_1, OQA_2, \dots, OQA_n$ имеют пары равных катетов, поэтому они равны, а значит, равны и их гипотенузы: $QA_1 = QA_2 = \dots = QA_n$.

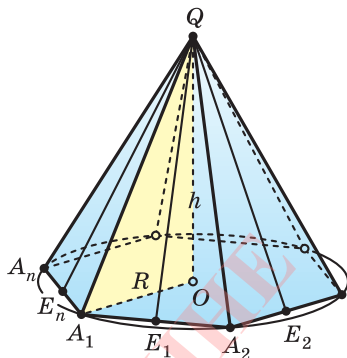


Рис. 18

б) Поскольку боковые рёбра пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны друг другу, то её боковые грани — равнобедренные треугольники, основания которых равны, так как многоугольник $A_1A_2...A_n$ — правильный. Поэтому боковые грани равны друг другу по трём сторонам.

в) Поскольку боковые грани пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны друг другу, то равны и их высоты, проведённые из вершины Q , т. е. равны апофемы пирамиды $QA_1A_2...A_n$.

Теорема 2. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра её основания и апофемы.*

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида (см. рис. 18). Площадь S её боковой поверхности состоит из площадей боковых граней, которые являются равными друг другу равнобедренными треугольниками с апофемами $QE_1, QE_2, \dots, QE_n$, равными друг другу. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \\ &+ \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2} QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = \\ &= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a, \end{aligned}$$

где p — полупериметр основания пирамиды, a — апофема пирамиды.

Ещё один класс пространственных фигур составляют тела вращения, к которым относятся цилиндр, конус, шар.

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 19). При

этом вращении одна сторона прямоугольника остаётся неподвижной, её называют *осью цилиндра*. Сторона, противоположная оси, образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью цилиндра*, а саму сторону — *образующей цилиндра*. Ещё две стороны прямоугольника образуют поверхности, которые являются равными кругами, эти круги называют *основаниями цилиндра* (рис. 20). На рисунке 21 дано изображение цилиндра.

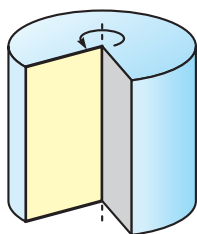


Рис. 19

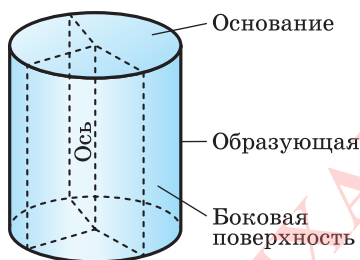


Рис. 20

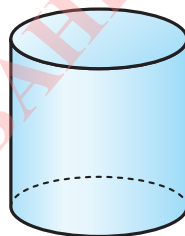


Рис. 21

Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 22), который называют *осью конуса*. Другой катет описывает круг, который называют *основанием конуса*, неподвижную вершину треугольника, которая не принадлежит основанию, называют *вершиной конуса*. Гипотенуза при вращении образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью конуса*, саму гипотенузу называют *образующей конуса* (рис. 23). На рисунке 24 дано изображение конуса.

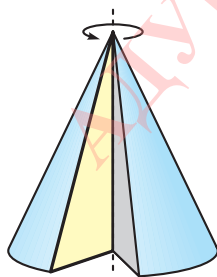


Рис. 22

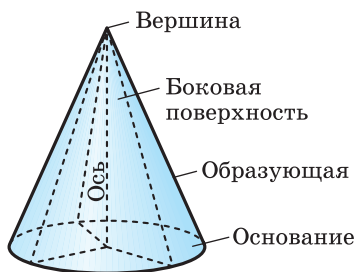


Рис. 23

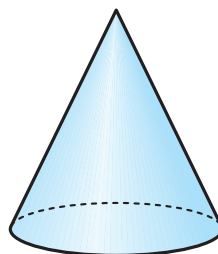


Рис. 24

Теорема 3. *Площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.*

Доказательство. Пусть имеется конус, радиус основания которого равен r , а образующая — l (рис. 25). Развернём боковую поверхность конуса на плоскость, в результате получится сектор, радиус которого равен образующей l (рис. 26). Найдём центральный угол φ этого сектора, приняв во внимание, что ему соответствует дуга окружности, равная длине окружности основания конуса, т. е. равная $2\pi r$.

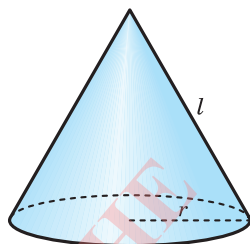


Рис. 25

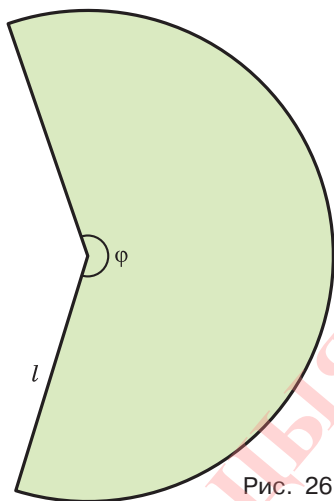


Рис. 26

Поскольку длина всей окружности, связанной с сектором, равна $2\pi l$ и этой длине соответствует полный угол, равный 360° , то

$$\varphi = \frac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^\circ \cdot r}{l}.$$

Теперь найдём площадь S сектора с радиусом l и углом φ :

$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l.$$

Поскольку выражение πr представляет длину полуокружности основания конуса, можем утверждать, что площадь боковой поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей.

Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 27). При этом вращении окружность описывает поверхность, которую называют *сферой* (рис. 28). На рисунке 29 дано изображение шара.

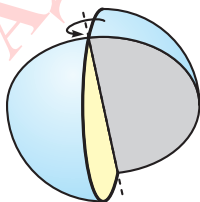


Рис. 27

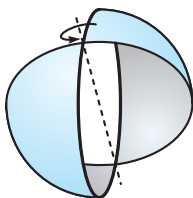


Рис. 28

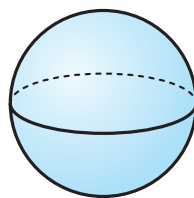


Рис. 29



1. Какие геометрические фигуры называются плоскими; пространственными?
2. Что называют изображением фигуры?
3. Какое тело называют многогранником?
4. Что называют гранями многогранника; рёбрами многогранника; вершинами многогранника?
5. Какой многогранник называется призмой?
6. Что называют основаниями призмы; боковыми гранями призмы; боковыми рёбрами призмы?
7. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?
8. Какая призма называется правильной призмой?
9. Какая призма называется параллелепипедом?
10. Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным параллелепипедом?
11. Какие рёбра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?
12. Какой многогранник называется пирамидой?
13. Что называют основанием пирамиды; боковыми гранями пирамиды; вершиной пирамиды?
14. Какая пирамида называется правильной пирамидой?
15. Какой отрезок называется апофемой правильной пирамиды?
16. Сформулируйте свойство боковых рёбер правильной пирамиды; боковых граней правильной пирамиды; апофем правильной пирамиды.
17. Какое тело называется цилиндром?
18. Какое тело называется конусом?
19. Какое тело называется шаром?

1. Докажите, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

2. Скажите, какая — плоская или пространственная — ломаная изображена на рисунке:

- а) 30; б) 31; в) 32; г) 33; д) 34; е) 35.

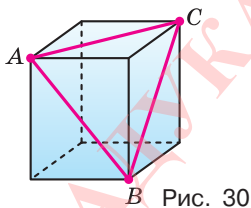


Рис. 30

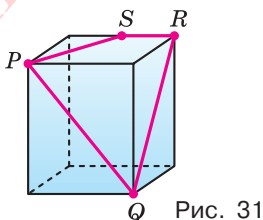


Рис. 31

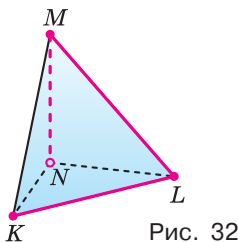


Рис. 32

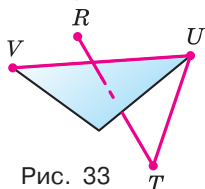


Рис. 33

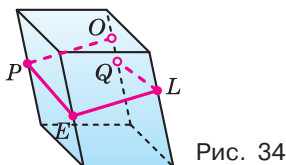


Рис. 34

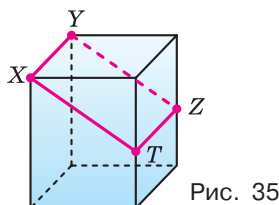


Рис. 35

3. Скажите, какая — плоская или пространственная — фигура изображена на рисунке:

а) 36; б) 37; в) 38.

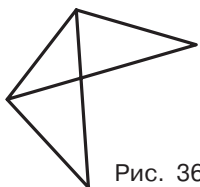


Рис. 36

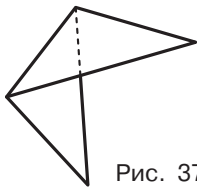


Рис. 37

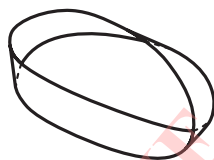


Рис. 38

4. Определите, является ли многогранником тело, изображённое на рисунке:

а) 39; б) 40; в) 41; г) 42; д) 43; е) 44.

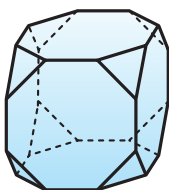


Рис. 39

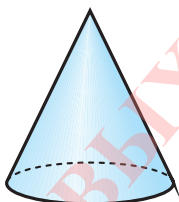


Рис. 40

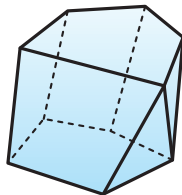


Рис. 41

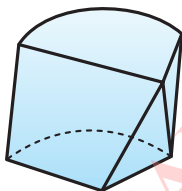


Рис. 42

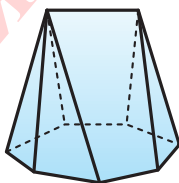


Рис. 43

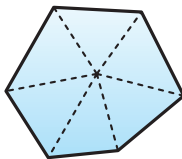


Рис. 44

5. На рисунке 45 изображён многогранник $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Назовите:

- а) грани с общим ребром CD ;
- б) грани с общим ребром DD_1 ;
- в) грани с общей вершиной E ;
- г) грани с общей вершиной C_1 ;
- д) рёбра с общей вершиной A ;
- е) рёбра с общей вершиной F_1 .

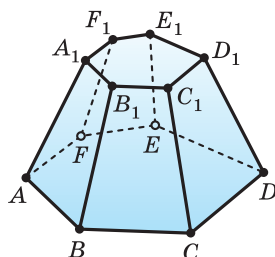


Рис. 45

6. На рисунке 46 изображена пятиугольная призма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ и её диагональ UX_1 . Назовите другие диагонали этого многогранника.

7. На рисунке 47 изображена четырёхугольная призма. Назовите:

- основания призмы;
- боковые грани с ребром EE_1 ;
- грани с ребром DE .

8. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра.

9. Основанием прямого параллелепипеда с боковым ребром 8 м является ромб с диагоналями 10 м и 24 м. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

10. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите полную поверхность призмы.

11. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 30 мм и 50 мм и углом между ними в 120° , а наибольшая из площадей боковых граней равна 3500 мм^2 . Найдите полную поверхность призмы.

12. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 15 см и высотой 12 см. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 20 см.

13. Сторона основания правильной n -угольной призмы равна a , а её боковое ребро — h . Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что:

- $n = 3, a = 5, h = 10$;
- $n = 4, a = 10, h = 30$;
- $n = 6, a = 18, h = 32$;
- $n = 5, a = 16, h = 25$.

14. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна 6 см, а отрезок, соединяющий вершину M пирамиды с центром O основания, — 8 см (рис. 46). Найдите:

- боковые рёбра пирамиды;

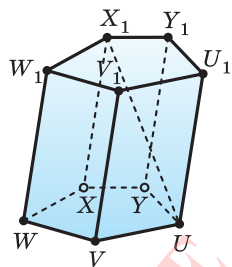


Рис. 46

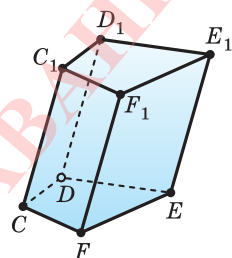


Рис. 47

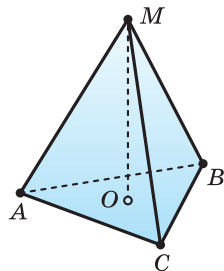


Рис. 48

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

15. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды равна $30\,420\text{ мм}^2$, а её боковое ребро — 169 мм . Найдите площадь основания пирамиды.

16. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15 см , а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 12 см . Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

17. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 см , а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 16 см . Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

18. Боковая поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна 240 см^2 , а её боковое ребро — 12 см . Найдите площадь основания пирамиды.

19. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 30 см , а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см . Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

20. Докажите, что количество вершин любой призмы — число чётное, а количество её рёбер — число, кратное трём.

21. Основанием пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной, равной 10 см , одна из диагоналей которого равна 16 см . Отрезок, соединяющий вершину Q пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 14 см (рис. 49). Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

22. Основанием пирамиды $REFGH$ является параллелограмм $EFGH$ со сторонами 10 см и 18 см и площадью 14

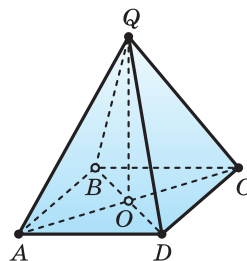


Рис. 49

90 см². Отрезок, соединяющий вершину R пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 6 см. Найдите:

- а) боковые рёбра пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды;
- в) полную поверхность пирамиды.

23. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 8 м и 10 м и меньшей диагональю 6 м. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 4 м. Найдите:

- а) боковые рёбра пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды;
- в) полную поверхность пирамиды.

24. Основанием пирамиды $PMNUV$ является квадрат $MNUV$ (рис. 50). Боковое ребро PN перпендикулярно каждой прямой плоскости основания, проходящей через точку N , углы M и U граней PMV и PUV прямые, а углы M и U граней PMN и PUN равны 45° каждый. Наибольшее боковое ребро равно 24 см. Найдите:

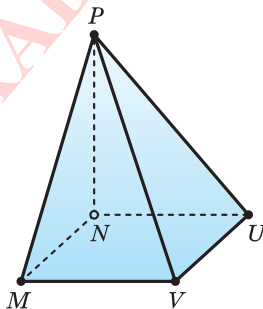


Рис. 50

- а) другие боковые рёбра пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды;
- в) полную поверхность пирамиды.

25. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — $\sqrt{69}$ см. Найдите:

- а) боковое ребро и апофему пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды;
- в) полную поверхность пирамиды.

26. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна 150 см², а её боковое ребро — 10 см. Найдите площадь основания пирамиды.

27. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 30 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см. Найдите:

- а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды;
- в) полную поверхность пирамиды.

28. Основанием пирамиды является ромб со стороной 15 см и меньшей диагональю 18 см. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей, перпендикулярен им и равен 12 см. Найдите высоты граней пирамиды.

29. Докажите, что боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности его основания и образующей.

30. Найдите боковую поверхность цилиндра, радиус основания и образующая которого соответственно равны:

- а) 7 см и 12 см; в) 1 м и 12 дм;
б) 12 см и 7 см; г) 0,7 м и 1,2 м.

31. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 300π см², а образующая — 6 см. Найдите площадь основания цилиндра.

32. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 90π м², а образующая — 5 м. Найдите полную поверхность цилиндра.

33. Диаметр основания цилиндра равен 1 м, его образующая равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

34. Образующая цилиндра на 12 см больше радиуса его основания, а полная поверхность равна 128π см². Найдите радиус основания и образующую цилиндра.

35. Определите, сколько понадобится краски, чтобы покрасить с двух сторон бак цилиндрической формы (рис. 51) высотой 2,5 м с диаметром основания 1,2 м, учитывая, что слой краски имеет толщину 0,1 мм.

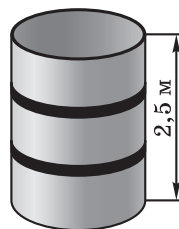


Рис. 51

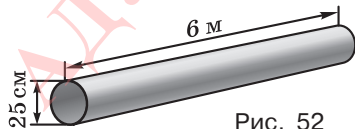


Рис. 52

36. Определите, сколько листов жести понадобится на изготовление трубы (рис. 52) длиной 6 м и диаметром 25 см, учитывая, что на швы расходуется 2,5 % площади боковой поверхности трубы.

37. Из квадрата, диагональ которого равна d , образована цилиндрическая поверхность. Найдите площадь основания соответствующего цилиндра.

38. Один цилиндр образован вращением прямоугольника с измерениями a и b вокруг стороны длиной a , второй — вращением вокруг стороны длиной b . Докажите, что боковые поверхности этих цилиндров равны, и определите отношение их полных поверхностей.

39. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, равен 35 мм, а радиус его основания — 12 мм. Найдите образующую конуса.

40. Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания, равен 63 см, а диаметр его основания — 32 см. Найдите боковую поверхность конуса.

41. Образующая конуса равна l и образует с радиусом основания угол α (рис. 53). Найдите площадь основания конуса, учитывая, что:

а) $l = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$;

б) $l = 24$ дм, $\alpha = 45^\circ$;

в) $l = 5$ м, $\alpha = 60^\circ$.

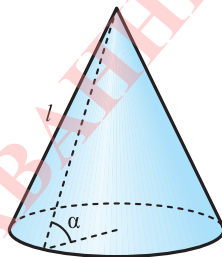


Рис. 53

42. Образующая конуса равна l и образует с радиусом основания угол α . Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что:

а) $l = 18$ см, $\alpha = 30^\circ$;

в) $l = 2,4$ м, $\alpha = 60^\circ$.

б) $l = 20$ дм, $\alpha = 45^\circ$;

43. Найдите угол развёртки боковой поверхности конуса, образующая которого равна 5 м, а диаметр основания — 6 м.

44. Найдите длину дуги сектора развёртки боковой поверхности конуса, учитывая, что образующая конуса равна 12 см и образует с радиусом его основания угол в 60° .

45. Найдите радиус основания и длину отрезка, соединяющего вершину конуса с центром его основания, учитывая, что развёрткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 36 см, а центральный угол — 120° .

46. Найдите боковую поверхность конуса, радиус основания и образующая которого соответственно равны:

а) 11 см и 8 см;

в) 3 м и 18 дм;

б) 8 см и 11 см;

г) 2,7 м и 1,2 м.

47. Площадь боковой поверхности конуса равна 540π см², а образующая — 9 дм. Найдите площадь основания конуса.

48. Площадь боковой поверхности конуса равна 80π м², а образующая — 10 м. Найдите полную поверхность конуса.

49. Диаметр основания конуса равен 10 м, его образующая равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

50. Образующая конуса на 24 см больше радиуса его основания, а полная поверхность равна 576π см². Найдите радиус основания и образующую конуса.

51. Один конус образован вращением прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг катета длиной a , другой — вращением вокруг катета длиной b . Определите, равны ли боковые поверхности этих конусов, и найдите отношение их полных поверхностей.

52. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 60° . Какие углы образует диагональ прямоугольника с его сторонами?

53. Диагонали ромба относятся как 3 : 4, а его периметр равен 60. Найдите площадь ромба.

54. В квадрат вписан круг, а в круг — правильный шестиугольник. Найдите отношение площадей этих фигур.

55. В окружность с радиусом 65 вписан прямоугольник, одна сторона которого больше другой в 2,4 раза. Найдите площадь прямоугольника.

56. Решите неравенство:

а) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$;

в) $\frac{5x-2}{8} - \frac{3x-1}{4} \geq -\frac{2}{3}$;

б) $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} < 1$;

г) $\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} \leq -\frac{3}{2}$.

57. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x - 3 < 0$;

в) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$;

б) $2x^2 - 5x - 3 > 0$;

г) $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

58. Решите неравенство:

а) $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$;

в) $\frac{4x+3}{2x-1} \geq 1$;

б) $\frac{3-0,5x}{2-4x} > 0$;

г) $\frac{3-4x}{3x+5} \leq -1$.

59. Автомобиль ехал сначала со скоростью 63 км/ч, а затем увеличил её и с большей скоростью проехал 54 км. Найдите большую скорость движения автомобиля, учиты-

вая, что на весь путь было затрачено 3 ч, а средняя скорость на всём пути оказалась равной 67 км/ч.

60. Есть две коробки для укладывания конфет. В одну помещается 54 конфеты, в другую — по 4 конфеты в одном ряду, а всего в обеих коробках — 10 рядов. Найдите количество рядов во второй коробке, учитывая, что все конфеты из обеих коробок полностью заполняют третью коробку, в которой рядов столько, сколько их вместе в первой и второй коробках, и в один ряд помещается 7 конфет.

61. На отрезке AB длиной 40 см выбрана точка K , и на отрезках-частях KA и KB построены прямоугольники $KACD$ и $KBFE$, в первом из которых сторона AC равна 40 см, а площадь второго — 360 см^2 (рис. 54). Найдите измерения прямоугольника $KBFE$, учитывая, что когда на отрезке AB построили третий прямоугольник $ABGH$ с площадью, равной сумме площадей прямоугольников $KACD$ и $KBFE$, то его второе измерение оказалось равным 34 см.

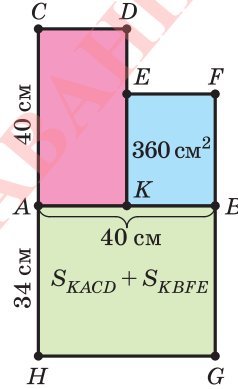


Рис. 54

62. Сколько общих точек могут иметь контуры двух четырёхугольников?

63. Расстояние от центра описанной около треугольника ABC окружности до стороны AB равно d . На стороне BC выбрана такая точка D , что $BD = 0,5AB$. Найдите CD , учитывая, что $\angle B = 60^\circ$.

64. Найдите сумму

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \ddots}}} + \frac{1}{2007} \\
 & + \frac{1}{2007}
 \end{aligned}$$

2. Прямые и плоскости

Наши пространственные представления подсказывают, что прямые и плоскости в пространстве могут располагаться по-разному.

Две прямые плоскости могут иметь только одну общую точку, такие прямые называются *пересекающимися*. На рисунке 55 показаны пересекающиеся прямые a и b и их единственная общая точка T . Две прямые плоскости могут не иметь общих точек. Тогда их называют *параллельными*. На рисунке 56 показаны параллельные прямые c и d . В пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. нет такой плоскости, которой бы они обе принадлежали. Такие прямые называются

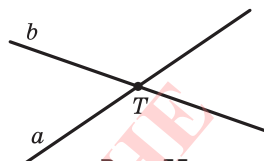


Рис. 55

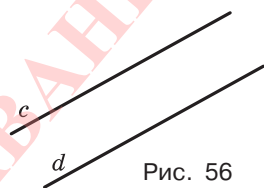


Рис. 56

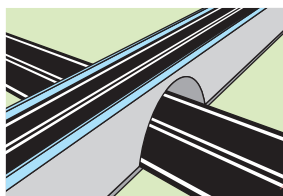


Рис. 57

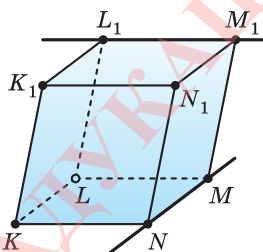


Рис. 58

скрещивающимися. Представление о таких прямых дают две дороги, из которых одна проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 57). Таковыми являются прямые, на которых расположены рёбра MN и L_1M_1 параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 58).

Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

Прямая может лежать в плоскости (рис. 59). Если прямая не лежит в плоскости, то она может пересекать её в некоторой точке (рис. 60) или не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 61). В последнем



Рис. 59

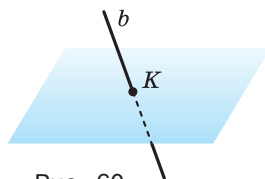


Рис. 60

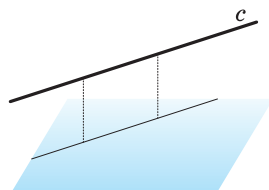


Рис. 61

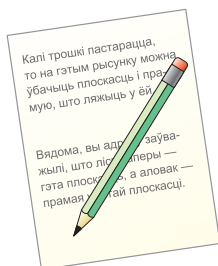


Рис. 62

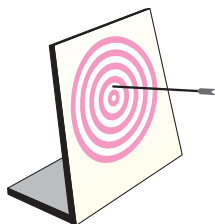


Рис. 63

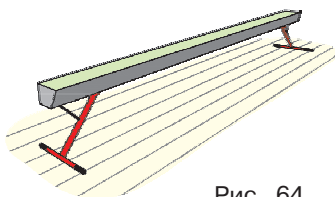


Рис. 64

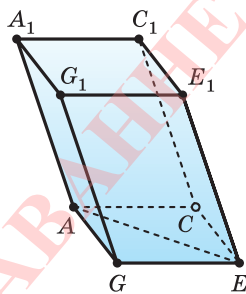


Рис. 65

случае прямая и плоскость называются *параллельными*. Представление о прямой, лежащей в плоскости, даёт карандаш, лежащий на столе (рис. 62), о пересекающихся прямой и плоскости — стрела, выпущенная из лука и попавшая в плоскую мишень (рис. 63), о прямой, не пересекающей плоскость, — пол в спортивном зале и гимнастическое бревно (рис. 64). Указанные виды взаимного расположения прямой и плоскости можно проследить и на изображении параллелепипеда (рис. 65). Прямая, которой принадлежит диагональ AE грани $ACEG$, лежит в плоскости этой грани. Прямая, проходящая через ребро AA_1 , пересекает плоскость грани $ACEG$. Прямая, содержащая ребро A_1C_1 , параллельна плоскости грани $ACEG$.

Как могут располагаться в пространстве две плоскости?

Плоскости могут пересекаться по прямой (рис. 66) или не иметь общих точек (рис. 67). В соответствии с этим их называют *пересекающимися* или *параллельными*. Представление о пересекающихся плоскостях даёт крышка стола и его боковуха (рис. 68), о параллельных плоскостях — пол и потолок в помещении (рис. 69). На изображении параллелепипеда на рисунке 65 пересекающимися являются

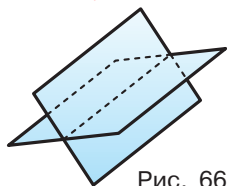


Рис. 66

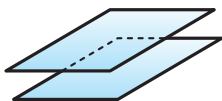


Рис. 67

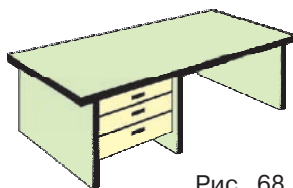


Рис. 68

плоскости граней AGG_1A_1 и $AGEC$, параллельными — плоскости граней AGG_1A_1 и CEE_1C_1 .

Знак $\parallel$ используют не только для обозначения параллельности прямых, но и параллельности прямой и плоскости и двух плоскостей. Если учесть, что прямые обозначаются малыми латинскими буквами $a, b, c, \dots$, а плоскости — малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, то записи $a \parallel b, c \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$ означают, что параллельны прямые a и b , прямая c и плоскость α , плоскости α и β .

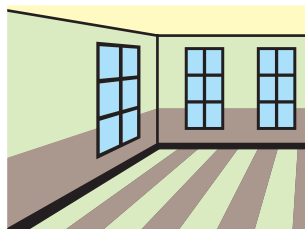


Рис. 69

Теория взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве основывается на следующих аксиомах.

Аксиома 1. Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость.

Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то каждая точка этой прямой принадлежит плоскости. В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости.

Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку.

Свойство плоскости, которую фиксирует аксиома 1, часто используется на практике. Острия ножек штатива фотоаппарата (рис. 70) принадлежат одной плоскости, и поэтому положение фотоаппарата устойчивое. Двери, закреплённые на двух петлях, не занимают определённого положения (рис. 71), но если добавить третью точку крепления — замок, то положение дверей фиксируется (рис. 72). Когда ножки табурета подрезаны неправильно, то табурет стоит на трёх ножках, а четвёртая ножка висит над полом (рис. 73).

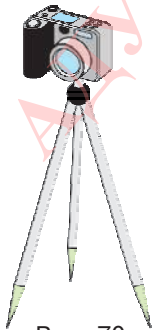


Рис. 70

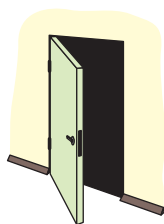


Рис. 71

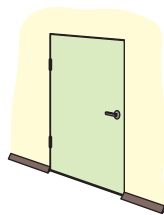


Рис. 72

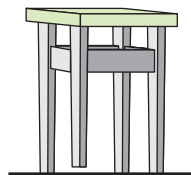


Рис. 73

Свойство плоскости, которое выражает аксиома 2, используют для проверки прямолинейности чертёжной линейки. Линейку прикладывают краем к поверхности стола: если край прямолинейный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола (рис. 74), а если неровный, то между краем линейки и поверхностью стола есть щель (рис. 75 и 76).

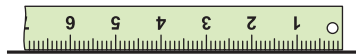


Рис. 74

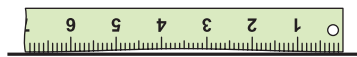


Рис. 75

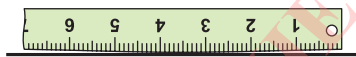


Рис. 76

Свойство плоскости, зафиксированное аксиомой 3, проявляется при пересечении смежных стен комнаты (рис. 77).



Рис. 77

Отметим, что в стереометрии остаются истинными все аксиомы планиметрии и все доказанные в ней утверждения. В частности, признаки равенства и признаки подобия треугольников остаются в силе и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

В соответствии с аксиомой 1 плоскость определяется тремя своими точками A, B, C , поэтому иногда плоскость обозначают тремя большими латинскими буквами: плоскость, проходящую через точки A, B, C , обозначают ABC .

Пример. На рёбрах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 призмы $KL MN K_1 L_1 M_1 N_1$ выбраны точки A, B, C , причём прямая, определённая точками B и C , не параллельна ребру K_1N_1 (рис. 78). Плоскости ABC и KNN_1 имеют общую точку A . В соответствии с аксиомой 3 они имеют общую прямую. Построим её.

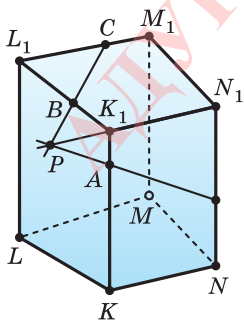


Рис. 78

Точка A принадлежит грани KK_1N_1N , а точки B, C — грани $K_1L_1M_1N_1$, и эти грани пересекаются по прямой K_1N_1 . Эта прямая и прямая BC лежат в одной плоскости и не параллельны. Поэтому они пересекаются в некоторой точке.

Найдём её, продлив отрезки BC и K_1N_1 , — получаем точку P .

Точка P принадлежит прямым BC и K_1N_1 , значит, она принадлежит как плоскости ABC , так и плоскости KK_1N_1 . Этим же плоскостям принадлежит и точка A . Значит, прямая, определённая точками P и A , принадлежит и плоскости ABC , и плоскости KK_1N_1 . Иными словами, плоскости ABC и KK_1N_1 пересекаются по прямой PA .

Теорема. 4. *Через прямую и точку вне её проходит единственная плоскость.*



Рис. 79

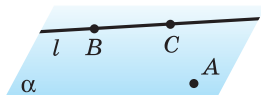


Рис. 80

Доказательство. Пусть есть прямая l и точка A , которая не принадлежит прямой l (рис. 79).

Выберем на прямой l две точки — B и C . Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому через них по аксиоме 1 проходит некоторая плоскость α (рис. 80). Плоскость α в соответствии с аксиомой 2 проходит и через прямую l , так как две её точки B и C принадлежат плоскости α .

Допустим, что через прямую l и точку A проходит ещё и плоскость β . Тогда плоскость β проходит как через точку A , так и через точки B и C . Поскольку по аксиоме 1 через три различные точки проходит единственная плоскость, то плоскость β совпадает с плоскостью α . Значит, через прямую l и точку A вне её проходит единственная плоскость.

Теорема 5. *Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.*

Доказательство. Пусть имеются две пересекающиеся прямые p и q и D — их общая точка (рис. 81).

Выберем на прямой q какую-либо точку E , отличную от точки D (рис. 82). В соответствии с теоремой 4 через прямую p и точку E проходит единственная плоскость γ . Плоскость γ проходит и через прямую q , так как две точки D и E прямой q принадлежат плоскости γ .

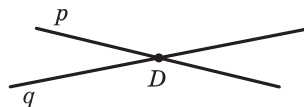


Рис. 81

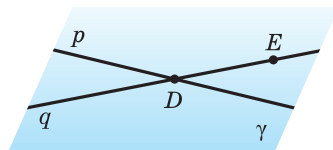


Рис. 82

Допустим, что через прямые p и q проходит ещё одна плоскость δ . Тогда плоскость δ проходит через точку E . Но через эту точку и прямую p в соответствии с теоремой 4 проходит единственная плоскость. Значит, плоскость δ совпадает с плоскостью γ . Таким образом, через пересекающиеся прямые p и q проходит единственная плоскость.

Теорема 5 находит своё применение на практике. Если столяру нужно распилить брусок под определённым углом, он, чтобы наметить плоскость распила, проводит в двух смежных гранях бруска пересекающиеся прямые PQ и PS (рис. 83).

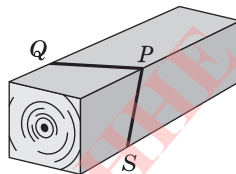


Рис. 83



1. Какие две прямые плоскости называются пересекающимися; параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Как могут располагаться две прямые в пространстве?
4. Какие прямая и плоскость называются пересекающимися; параллельными?
5. Как могут располагаться в пространстве прямая и плоскость?
6. Какие две плоскости называются пересекающимися; параллельными?
7. Как могут располагаться в пространстве две плоскости?
8. Сформулируйте свойство плоскости, проходящей через три точки, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
9. Сформулируйте свойство прямой, две точки которой принадлежат плоскости, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
10. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
11. Как обозначаются точки; прямые; плоскости?
12. Назовите способы задания плоскости.

65. Сколько общих точек могут иметь:

- | | |
|------------------------|-------------------|
| а) две прямые; | в) две плоскости? |
| б) прямая и плоскость; | |

66. Могут ли иметь единственную общую точку:

- | | |
|------------------------|-------------------|
| а) две прямые; | в) две плоскости; |
| б) прямая и плоскость; | г) три плоскости? |

67. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Определите:

- а) могут ли три из них принадлежать одной прямой;
- б) сколько плоскостей можно провести через них.

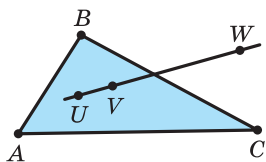


Рис. 84

68. Сколько образуется линий при попарном пересечении трёх плоскостей?

69. Точки U и V являются точками треугольника ABC , а точка W принадлежит прямой UV (рис. 84). Принадлежит ли точка W плоскости ABC ?

70. Докажите, что:

а) прямая a , пересекающая в различных точках две пересекающиеся прямые k и l , принадлежит плоскости этих прямых;

б) если некоторая точка A принадлежит прямой k , которая принадлежит плоскости α , то точка A принадлежит плоскости α ;

в) если две точки A и B принадлежат как прямой l , так и плоскости α , то прямая l лежит в плоскости α ;

г) если плоскости α и β пересекаются по прямой l и точка A принадлежит как плоскости α , так и плоскости β , то точка A принадлежит прямой l .

71. На рисунке 85 изображён параллелепипед $NOPQDEFC$. Назовите:

а) прямые, пересекающиеся с прямой CD ;

б) прямые, пересекающиеся с прямой FP ;

в) прямые, параллельные прямой CD ;

г) прямые, параллельные прямой FP ;

д) прямые, скрещивающиеся с прямой CD ;

е) прямые, скрещивающиеся с прямой FP .

72. На рисунке 86 изображена призма $ABCDEF PQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

а) прямые, пересекающиеся с плоскостью ABC ;

б) прямые, пересекающиеся с плоскостью UTF ;

в) прямые, лежащие в плоскости PTR ;

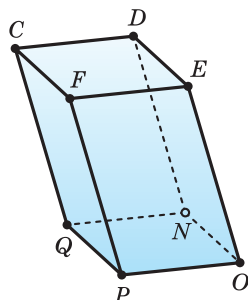


Рис. 85

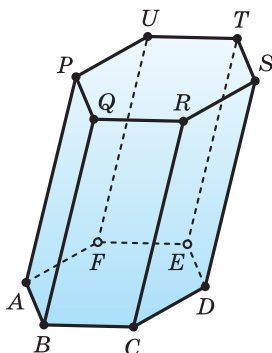


Рис. 86

- г) прямые, принадлежащие плоскости CDR ;
- д) прямые, параллельные плоскости FEC ;
- е) прямые, параллельные плоскости AQB .

73. На рисунке 85 изображён параллелепипед $NOPQDEFC$. Назовите:

- а) плоскости, пересекающиеся с прямой CQ ;
- б) плоскости, пересекающиеся с прямой OP ;
- в) плоскости, в которых лежит прямая NO ;
- г) плоскости, которым принадлежит прямая DN ;
- д) плоскости, параллельные прямой CF ;
- е) плоскости, параллельные прямой EO .

74. На рисунке 86 изображена призма $ABCDEF PQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

- а) плоскости, пересекающиеся с плоскостью UQR ;
- б) плоскости, пересекающиеся с прямой FT ;
- в) плоскости, параллельные плоскости ACE ;
- г) плоскости, параллельные плоскости ETS .

75. Используя рисунок 87, назовите:

а) точки, лежащие в плоскостях LMQ и NME ;

б) плоскости, в которых лежит прямая NR ;

в) точку пересечения прямой BC с плоскостью KLN ;

г) точки пересечения прямых PL и ND с плоскостью OPR ;

д) прямую, по которой пересекаются плоскости KON и KLM ;

е) прямую, по которой пересекаются плоскости RDQ и MNK ;

ж) точку пересечения прямых AB и LM ;

з) точку пересечения прямых RQ и BD ;

и) точку пересечения прямых BQ и MC .

76. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли:

а) какие-либо три из них лежать на одной прямой;

б) прямые AB и CD пересекаться?

77. Докажите, что через три данные точки, лежащие на одной прямой, проходит плоскость. Сколько есть таких плоскостей?

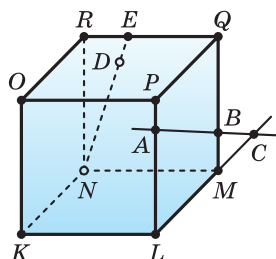


Рис. 87

78. Докажите, что если две смежные вершины четырёхугольника и точка пересечения его диагоналей принадлежат некоторой плоскости, то четырёхугольник целиком лежит в этой плоскости.

79. Правильное ли утверждение:

а) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны во внутренних точках;

б) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны?

80. Могут ли две плоскости иметь:

а) только одну общую точку;

б) только два общие точки;

в) только одну общую прямую;

г) только две общие прямые?

81. Докажите, что любая прямая, которая:

а) проходит через вершину A треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямую CD , принадлежит плоскости ACD ;

б) не проходит через вершину B треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает как прямую BC , так и прямую BD , принадлежит плоскости BCD .

82. Плоскость β проходит через две смежные вершины трапеции и точку пересечения её диагоналей. Докажите, что две другие вершины трапеции лежат в плоскости β .

83. Есть три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, которые:

а) проходят через точку A и пересекают прямую BC , лежат в одной плоскости;

б) не проходят через точку A и пересекают обе прямые AB и AC , лежат в одной плоскости.

84. Можно ли утверждать, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:

а) проходит через вершину треугольника;

б) пересекает две стороны треугольника;

в) пересекает в различных точках две стороны треугольника;

г) пересекает две прямые, на которых лежат стороны треугольника;

д) пересекает три прямые, на которых лежат стороны треугольника?

85. Есть прямая a и точка K , не принадлежащая ей. Докажите, что все прямые, проходящие через точку K и пересекающие прямую a , лежат в одной плоскости.

86. Верно ли, что:

а) через любые две точки проходит единственная прямая;

б) через любые три точки проходит единственная плоскость;

в) через любые прямую и точку проходит единственная плоскость;

г) три попарно пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости;

д) через любые две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость?

87. Четырёхугольная пирамида $PGHKL$ на рисунке 88 — правильная, а PA и PB — высоты её граней PGH и PHK . Докажите, что треугольники PGA и PHB равны.

88. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 12 см^2 . Найдите диагональ боковой грани, учитывая, что диагональ основания равна $\sqrt{2} \text{ см}$.

89. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDHGFE$ является квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, а боковое ребро AH параллелепипеда равно 8 см (рис. 89). Найдите длину пространственной ломаной $HFDBH$.

90. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ (рис. 90) относится к боковому ребру как 2 : 3. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $16 + 4\sqrt{13} \text{ дм}$.

91. Точки A и B делят рёбра QD и QE правильной четырёхугольной пирамиды $QCDEF$ со всеми равными рёбра-

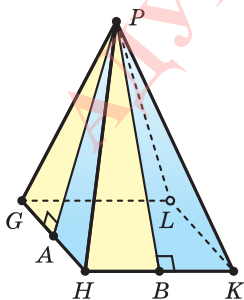


Рис. 88

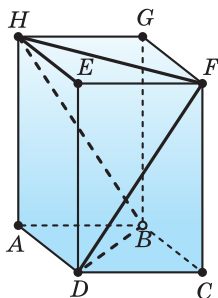


Рис. 89

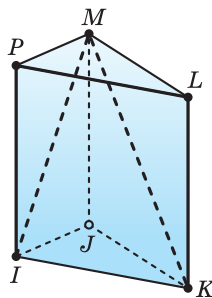


Рис. 90

ми в отношении $5 : 7$, если считать от вершины Q . Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина ломаной $ABQFA$ равна 70 см.

92. Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с квадратным основанием равна 2640 мм². Найдите рёбра параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, вписанной в треугольник NKK_1 , равен 5 мм.

93. Диагональ боковой грани прямоугольного параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием равна 52 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник CC_1D , равен 8 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

94. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 8 см, а её боковая поверхность — $16\sqrt{15}$ см². Найдите сторону основания пирамиды, учитывая, что радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен $2\sqrt{0,6}$ см.

95. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник, радиусы окружностей, вписанных в него и описанных около него, соответственно равны 4 см и 10 см. Найдите поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 16 см.

96. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность. Боковая сторона трапеции равна 12 см и образует с основанием угол в 30° . Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что её полная поверхность равна 336 см².

97. Точки M и N принадлежат рёбрам SS_1 и RR_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Докажите, что прямая MN принадлежит плоскости RSS_1 .

98. Прямая a лежит в одной из пересекающихся плоскостей β и пересекает другую плоскость γ . Докажите, что прямая a пересекает линию пересечения плоскостей β и γ .

99. Точки P , Q и R принадлежат соответственно рёбрам SA , SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 91). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость:

- а) SBC ; в) ABC ; д) SDC .
б) SAB ; г) SBD ;

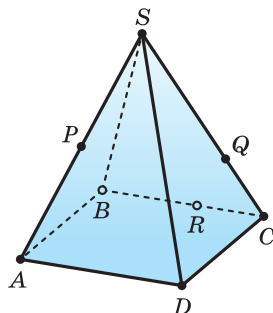


Рис. 91

100. Используя рисунок 92, на котором точки B и C принадлежат рёбрам PK и PT треугольной пирамиды $KPTU$, а точка A лежит на прямой, проходящей через ребро KU :

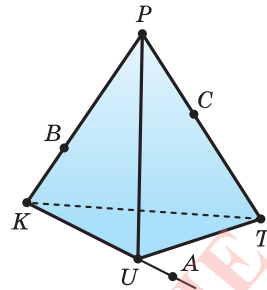


Рис. 92

- а) назовите прямые, которым принадлежит точка A ;
- б) назовите прямые, которым принадлежит точка U ;
- в) докажите, что прямая AC лежит в плоскости KPU ;
- г) установите, какой грани пирамиды принадлежит прямая BC ;
- д) установите, какой грани пирамиды принадлежит прямая KT ;
- е) назовите прямые, через которые проходит плоскость KPT .

101. Точка M — внутренняя точка ребра AJ треугольной пирамиды $AIJK$, точка N лежит на луче AK за точкой K . Постройте:

- а) точку пересечения прямой MN с плоскостью IJK ;
- б) прямую, по которой пересекаются плоскости IMN и IJK .

102. Используя рисунок 93, на котором E — точка ребра AI четырёхугольной пирамиды $AIJKL$, точка F принадлежит ребру AK , а точка G лежит на луче AK за точкой K :

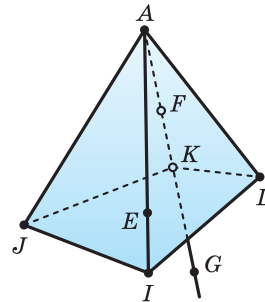


Рис. 93

- а) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости IAJ и JAK ;
 - б) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости AJG и KAL ;
 - в) докажите, что прямая EF лежит в плоскости IAK ;
 - г) докажите, что прямые EF и FG лежат в одной плоскости;
 - д) назовите плоскости, которым принадлежит прямая JL .
- 103.** Точки A и B — середины рёбер TZ и YZ пирамиды $RTXYZ$. Постройте:

- а) точку пересечения прямой AB и плоскости RXY ;
- б) прямую, по которой пересекаются плоскости RAB и RXY .

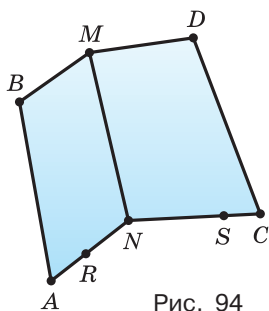


Рис. 94

104. На отрезке MN как на стороне в разных плоскостях построены два четырёхугольника $MNAB$ и $MNCD$, на отрезках NA и NC выбраны внутренние точки R и S (рис. 94). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку, в которой прямая MR пересекает плоскость ABC ;

б) постройте точку пересечения прямой CD с плоскостью ARS ;

в) докажите, что прямая RS принадлежит плоскости CAN .

105. На рисунке 95 изображена четырёхугольная призма $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$, точка P выбрана на луче $D_1 E_1$ за точкой E_1 , а точка R — на ребре $C_1 F_1$. Используя этот рисунок:

а) докажите, что прямая PR принадлежит плоскости $C_1 D_1 F_1$;

б) докажите, что прямая PR пересекает прямую $E_1 F_1$;

в) назовите прямую, по которой плоскость $C_1 D_1 F_1$ пересекает плоскость $DD_1 E$;

г) назовите прямую, по которой плоскость $C_1 D_1 F_1$ пересекает плоскость PRF ;

д) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость DEE_1 ;

е) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость $FF_1 E_1$.

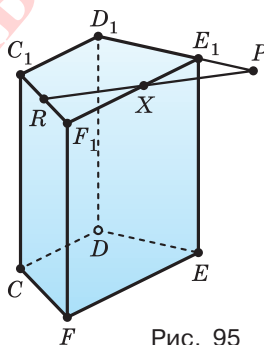


Рис. 95

106. Точки A и B — внутренние точки рёбер KM и KQ призмы $KMOQ K_1 M_1 O_1 Q_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость $M_1 M O$;

б) прямую, по которой плоскость ABO_1 пересекает плоскость MOO_1 .

107. Точки A , B , C являются серединами рёбер $T_1 U_1$, $U_1 V_1$, $V_1 V$ параллелепипеда $TUVW T_1 U_1 V_1 W_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость $WW_1 V_1$;

б) прямую, по которой плоскость ABC пересекает плоскость $WW_1 V_1$.

108. Диагонали KM и LN основания $KLMN$ пирамиды $AKLMN$ пересекаются в точке O , точка B — внутренняя

точка отрезка KO , а точка C лежит на луче LN за точкой N . Постройте:

а) точку, в которой прямая BC пересекает плоскость ALM ;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ALM .

109. Есть призма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На луче TT_1 за точкой T_1 выбрана точка H , через которую проведены прямые HU и HX (рис. 96). Используя это:

а) докажите, что прямые HU и T_1U_1 пересекаются в некоторой точке B ;

б) назовите точку, в которой прямая HU пересекает плоскость $M_1T_1X_1$;

в) докажите, что прямые HX и T_1X_1 пересекаются в некоторой точке A ;

г) докажите, что прямая HX и плоскость $M_1T_1U_1$ пересекаются в точке A ;

д) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и T_1TU ;

е) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и MTX .

110. Имеется параллелепипед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Постройте:

а) точку пересечения прямой EE_1 с линией пересечения плоскостей BC_1D и C_1CE ;

б) линию пересечения плоскостей BC_1D и EDD_1 .

111. Точки A и B лежат в гранях PQS и PRS треугольной пирамиды $PQRS$ (рис. 97). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая AB пересекает:

а) плоскость QRS ;

б) плоскость PQR .

112. Медианы BB_1 и NN_1 грани BKN четырёхугольной пирамиды $BKLMN$ пересекаются в точке G (рис. 98). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте

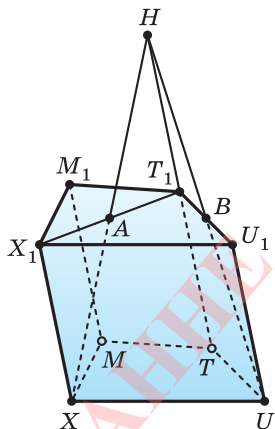


Рис. 96

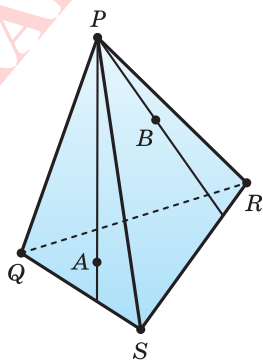


Рис. 97

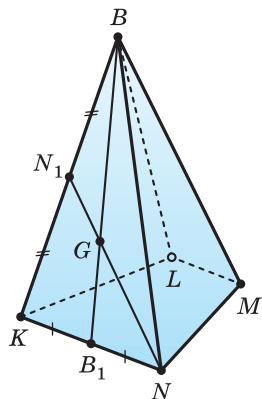


Рис. 98

точку, в которой прямая MG пересекает плоскость BLN .

113. Точку M выберите на диагонали DC_1 грани треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$, точку N — на отрезке E_1F , где F — внутренняя точка ребра DE , точку L — на луче DD_1 за точкой D_1 (рис. 99). Постройте прямую, по которой плоскость MNL пересекает плоскость ECC_1 .

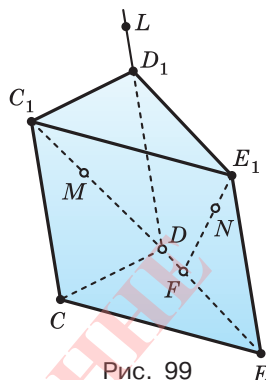


Рис. 99

114. Выберите точки A и B соответственно на рёбрах MX и MY четырёхугольной пирамиды $MXYZV$, а точку C — на луче YZ за точкой Z . Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и XYZ .

115. В треугольнике со сторонами 4, 5, 6 проведены биссектриса среднего по величине угла и биссектриса угла, смежного с ним. Определите расстояние между основаниями этих биссектрис.

116. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором биссектриса:

а) прямого угла делит гипотенузу на отрезки длинами m и n ;

б) острого угла делит катет на отрезки длинами m и n , $m > n$.

117. В равнобедренном треугольнике косинус угла при основании равен 0,28. Найдите высоты этого треугольника, учитывая, что его периметр равен 16 см.

118. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y + 2 = 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14, \\ x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + xy + 3 = 0, \\ 3x - y + 7 = 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{x+3y}{y-1} - \frac{y-x}{2x} = 2, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

119. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + xy - y^2 = 1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

120. Решите неравенство:

а) $x^2 + x - 6 < 0;$

д) $\frac{5}{x} - \frac{3}{3-x} \leq 0;$

б) $\frac{x-1}{x+5} \leq 0;$

е) $\frac{4}{6-x} \geq \frac{6}{x};$

в) $(x+2)(5-x) > x+2;$

ж) $\frac{x-1}{x+5} \leq \frac{5}{x};$

г) $\frac{2x-1}{3x+2} \geq 3;$

з) $\frac{2x-1}{3x+2} \geq \frac{x-2}{2x+3}.$

121. На отрезке MN выбрали такую точку A , что $AM - AN = 2$ м, и затем на полученных отрезках-частях как на катетах построили такие прямоугольные треугольники, что при их вращении вокруг отрезка MN образовались конусы, площадь основания одного из которых оказалась равной 42 м^2 , а объем второго — 198 м^3 . Третий конус с высотой, равной отрезку MN , и объемом, равным суммарному объему первого и второго конусов, имеет основание площадью $55,5 \text{ м}^2$ (рис. 100). Найдите высоты

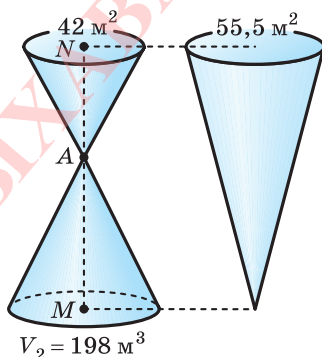


Рис. 100

этих конусов, учитывая, что объем V конуса находится по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$, где H — высота конуса, а $S_{\text{осн.}}$ — площадь его основания.

122. На отрезке CD выбрана такая точка T , что $TC - TD = 9$ см, и на полученных частях TD и TC построили такие прямоугольники $TDUV$ и $TCQP$, что ширина TV первого из них равна 7 см, а площадь второго — 180 см^2 (рис. 101). Найдите измерения второго прямоугольника, учитывая, что когда на отрезке CD построили третий прямоугольник $CDGH$ с площадью,

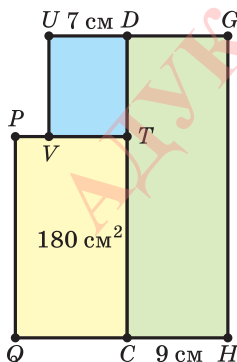


Рис. 101

равной суммарной площади первого и второго прямоугольников, то его ширина CH оказалась равной 9 см.

123. Велосипедист сначала ехал со скоростью 18 км/ч, а затем снизил её и с меньшей скоростью проехал 39 км. Найдите время движения велосипедиста с той и другой скоростью, учитывая, что средняя скорость движения на всём пути оказалась равной 15 км/ч и с меньшей скоростью он ехал на 1 ч больше.

* * *

124. Определите, какое из чисел больше: $2007^{2009} \cdot 2009^{2007}$ или 2008^{4016} .

125. Числа α и β являются корнями уравнений $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 0$) и $x^2 - px - q = 0$ соответственно. Докажите, что между числами α и β есть корень уравнения $x^2 - 2px - 2q = 0$.

126. Каждую грань куба разделили на 16 квадратов, и в полученные квадраты записали такие числа, что сумма каждого из этих чисел и четырёх чисел, записанных в смежных квадратах, равна 13. Докажите, что не все записанные числа являются целыми.

3. Построение сечений многогранников

Изучая стереометрию, приходится пространственные фигуры показывать на плоских рисунках. Часто на рисунке нужно показать взаимное расположение двух фигур. Если одна из фигур — многогранник, а вторая — плоскость, то их взаимное расположение характеризует та часть многогранника, которая принадлежит рассматриваемой плоскости, или, иными словами, *сечение многогранника плоскостью*. Такую плоскость называют *секущей*.

Секущая плоскость пересекает поверхность многогранника по отрезкам, а сечением многогранника плоскостью является один или несколько многоугольников.

На рисунке 102 изображено сечение пятиугольной призмы, которое является семиугольником. Сечение «рамы» плоскостью на рисунке 103 состоит из двух четырёхугольников.

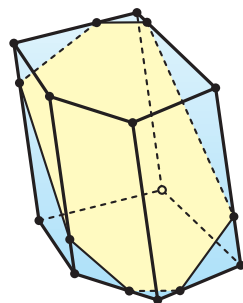


Рис. 102

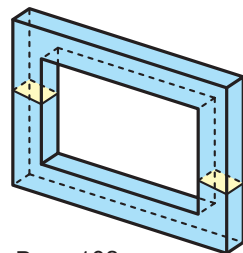


Рис. 103

Для построения сечения многогранника достаточно построить общие точки его граней и секущей плоскости.

Задача 1. Построим сечение треугольной пирамиды $QABC$ плоскостью α , проходящей через точки K , L , M рёбер AB , AQ , CQ (рис. 104).

Секущая плоскость α имеет с гранью AQB две общие точки K и L , поэтому она пересекает эту грань по отрезку KL .

Также, поскольку точки L и M — общие точки секущей плоскости и грани AQC , то LM — линия пересечения этих плоскостей.

Грань ABC имеет с секущей плоскостью общую точку K . Найдём точку, в которой плоскость α пересекает ребро BC . Обратим внимание на то, что точка X пересечения прямых LM и AC принадлежит плоскости α , плоскости AQC и плоскости ABC . А поскольку точки K и X — общие точки плоскостей α и ABC , то KX — прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость ABC . Точка N пересечения прямой KX с ребром BC принадлежит плоскости α . Значит, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN , а грань BQC — по отрезку MN .

Четырёхугольник $KLMN$ — искомое сечение пирамиды плоскостью α .

Прямые KL и KN называют *следами* плоскости α на плоскостях ABQ и ABC соответственно.

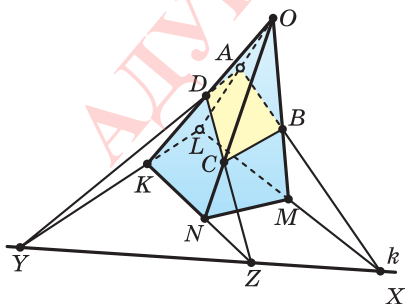


Рис. 105

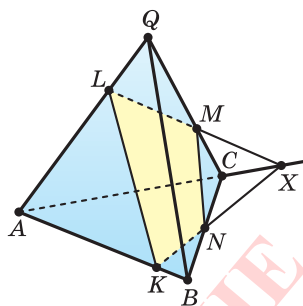


Рис. 104

Задача 2. Построим сечение пирамиды $OKLMN$ плоскостью β , проходящей через точку A на ребре OL , и прямую k в плоскости основания $KLMN$ (рис. 105).

Найдём точку X , в которой пересекаются прямые LM и k . Эта точка принадлежит и секущей плоскости β как точка прямой k , и плоскости грани LOM как точка прямой LM .

Точка A также принадлежит этим обеим плоскостям. Поэтому плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX , а грань LOM — по отрезку AB , где B — точка пересечения прямых AX и OM .

Так же найдём точки Y и D и отрезок AD , по которым плоскость β пересекает грань OLK , а затем точки Z и C и отрезки DC и BC . Четырёхугольник $ABCD$ — искомое сечение.

Задача 3. Точки A, B, C — точки на разных рёбрах четырёхугольной призмы. Найдём сечение призмы плоскостью ABC .

Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах призмы лежат точки A, B, C . Наиболее просто строить сечение в том случае, когда точки A, B, C лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины. Искомое сечение в этом случае — треугольник ABC (рис. 106).

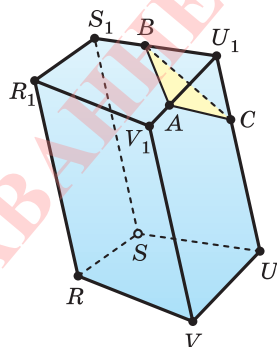


Рис. 106

Если точки A, B, C расположены так, как изображено на рисунке 107, то строить сечение сложнее. Здесь сначала построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдём точки M и N пересечения прямых AB и BC , которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV , N — точка пересечения прямых BC и UV . Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

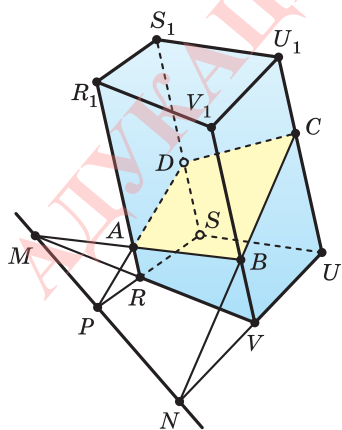


Рис. 107

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S . Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A , получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S . Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD , а грань UU_1S_1S — по отрезку CD . Искомым сечением является четырёхугольник $ABCD$.

Видим, что новым элементом в этом решении по сравнению с задачей 2 является построение следа секущей плоскости на плоскости основания.

На рисунке 108 показан случай, когда искомым сечением является пятиугольник. Здесь использована точка C_1 пересечения прямой UU_1 с секущей плоскостью. Следы секущей плоскости на боковых гранях пирамиды строятся так же, как и в предыдущем случае.

Рисунок 109 показывает, что искомым сечением четырёхугольной призмы может быть и шестиугольник. След AB секущей плоскости на плоскости основания позволяет последовательно найти точки X и Y его пересечения с плоскостями SUU_1S_1 и RSS_1R_1 , след XC секущей плоскости на плоскости SUU_1S_1 , точку Z пересечения прямой SS_1 с секущей плоскостью и след ZY секущей плоскости на плоскости RSS_1R_1 .

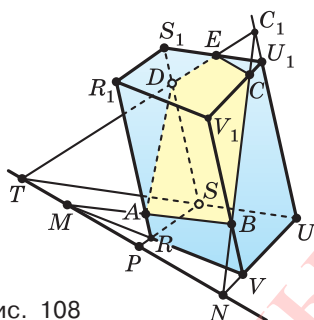


Рис. 108

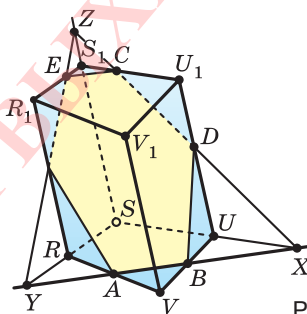


Рис. 109



1. Какая фигура называется сечением многогранника? Какой фигурой может быть это сечение?
2. Какая прямая называется следом одной плоскости на другой?
3. Каким может быть сечение плоскостью четырёхугольной призмы?

127. Точки A, B, C лежат на рёбрах MM_1, M_1P_1, M_1T_1 призмы $MPQT M_1P_1Q_1T_1$ (рис. 110). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC .

128. Изобразите куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ и отметьте точки B и C на рёбрах SU и RU . Постройте сечение куба плоскостью BCT_1 .

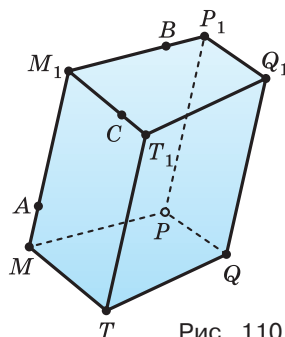


Рис. 110

129. Изобразите куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и отметьте середины A , B и C рёбер NM , NO и NN_1 . Используя полученный рисунок:

- а) постройте сечение куба плоскостью ABC ;
- б) докажите, что треугольник ABC правильный;
- в) найдите площадь треугольника ABC , приняв ребро куба равным 1 м.

130. Изобразите куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ и отметьте середины A и B его рёбер NQ и QR . Докажите, что сечение куба плоскостью ABQ_1 есть равнобедренный треугольник, и найдите ребро куба, учитывая, что периметр этого треугольника равен a .

131. Рёбра UX , UZ , UU_1 прямоугольного параллелепипеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ соответственно равны 6 см, 6 см, 8 см. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью XY_1Z есть равнобедренный треугольник, и найдите высоты этого треугольника.

132. Изобразите прямоугольный параллелепипед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через прямую T_1Q_1 и вершину R . Найдите площадь этого сечения, учитывая, что рёбра RT и RQ равны друг другу и равны l , а радиус окружности, описанной около четырёхугольника RQQ_1R_1 , равен a .

133. Сторона основания правильной треугольной призмы $CDEF C_1D_1E_1F_1$ равна 12 см, а её боковое ребро — 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которой принадлежат сторона основания и противоположная вершина другого основания.

134. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и её боковое ребро соответственно равны k и l . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

135. Изобразите куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ и отметьте середину C его ребра SS_1 . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую RT и точку C . Найдите медианы треугольника RTC , учитывая, что ребро куба равно 40 мм.

136. Изобразите куб $IJKLI_1J_1K_1L_1$ и постройте его сечение плоскостью IKJ_1 . Найдите ребро куба, учитывая, что площадь этого сечения равна S .

137. Точки K и L выбраны на рёбрах DA и DC призмы $ABCD$, а точка M — на луче BB_1 за точкой B_1 (рис. 111). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью KLM .

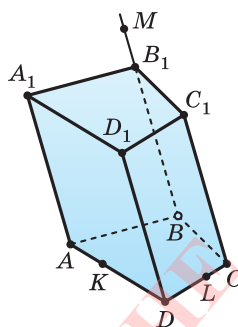


Рис. 111

138. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскостью KLM , учитывая, что точки K, L, M лежат соответственно на лучах C_1A_1, EE_1, H_1H за точками A_1, E_1, H (рис. 112).

139. Изобразите призму $RSXYR_1S_1X_1Y_1$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через середины A, B, C рёбер RY, RR_1, VV_1 .

140. Точки A и B лежат на рёбрах KK_1 и LL_1 треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$, а точка C — на плоскости KLM (рис. 113). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC .

141. Точки A и B лежат соответственно на рёбрах KK_1 и MM_1 призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а точка C — на плоскости грани $KMOQ$ (рис. 114). Постройте сечение призмы плоскостью ABC .

142. Изобразите пирамиду $ABCD$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, AD . Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все рёбра этой пирамиды равны l .

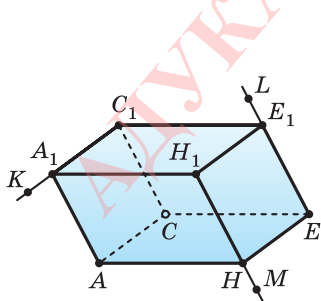


Рис. 112

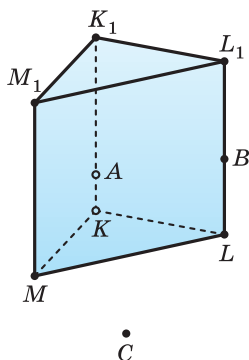


Рис. 113

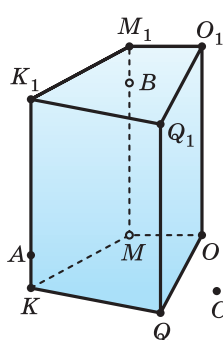


Рис. 114

143. На рисунке 115 точки U, V, W выбраны на рёбрах AB, BC, AD пирамиды $ABCD$. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью UVW .

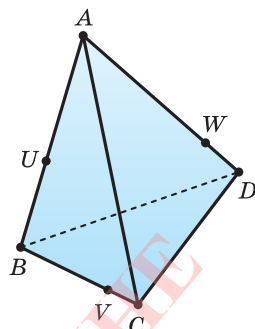


Рис. 115

144. Постройте сечение четырёхугольной призмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$ плоскостью ABC , учитывая, что точки A, B, C выбраны на рёбрах RS, RV, TT_1 .

145. Постройте сечение треугольной пирамиды $MNOP$ плоскостью ABC , учитывая, что точки A, B, C выбраны соответственно на рёбрах MN, OP, PN .

146. Точка C — середина ребра JL правильной треугольной пирамиды $IJKL$, боковая грань которой равна грани основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью IKC и найдите радиусы окружности, вписанной в это сечение и описанной около него.

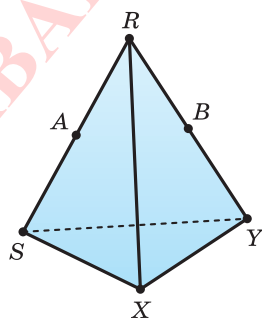


Рис. 116

147. На рисунке 116 изображена правильная пирамида $RSXY$, у которой грань основания равна боковой грани. На её рёбрах RS и RY отмечены их середины A и B . Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью ABX . Докажите, что треугольник ABX является равнобедренным, и найдите его периметр и площадь, учитывая, что ребро пирамиды равно a .

148. На рисунке 117 изображена призма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на рёбрах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 выбраны точки A, B, C .

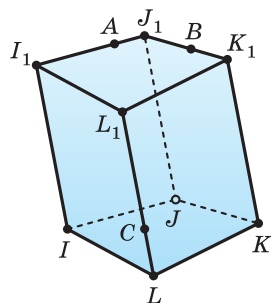


Рис. 117

Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC .

149. Изобразите призму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и на её рёбрах NN_1, MP, OP выберите точки C, D, E . Постройте сечение призмы плоскостью CDE .

150. Есть правильная призма $XYZX_1Y_1Z_1$, все рёбра которой равны друг другу. Найдите площадь сечения призмы плоскостью XY_1Z_1 , учитывая, что полная поверхность призмы равна S .

151. Есть такая правильная треугольная призма, что плоскость, проходящая через сторону основания и противоположную вершину другого основания, делит полную поверхность призмы в отношении 2 : 3. Найдите эту поверхность, учитывая, что ребро основания равно a .

152. На рисунке 118 изображена правильная пирамида $ABCDE$ и на ребре AE отмечена его середина M . Треугольник BMD — сечение этой пирамиды плоскостью, которой принадлежат прямая BD и точка M . Найдите высоты треугольника BMD , учитывая, что все рёбра пирамиды равны 20 мм.

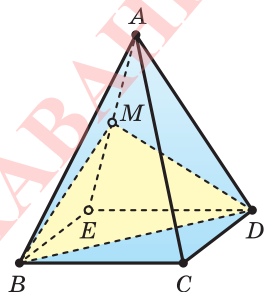


Рис. 118

153. Точка A — середина бокового ребра KE правильной четырёхугольной пирамиды $KCDEF$, все рёбра которой равны друг другу. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DF и точку A . Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что площадь этого сечения равна S .

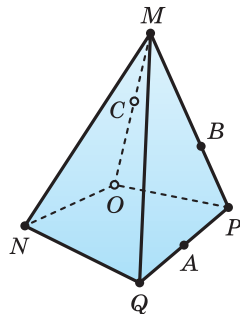


Рис. 119

154. Перенесите в тетрадь рисунок 119, на котором изображена четырёхугольная пирамида $MNOPQ$ и отмечены точки A, B, C на рёбрах PQ, PM, OM соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B, C .

155. Изобразите четырёхугольную пирамиду $STUVW$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через точки A, B, C на рёбрах ST, TW, VW .

156. Есть пирамида $RMNOP$, все рёбра которой равны друг другу. Сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину R и прямую NP , является треугольник RNP . Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая,

что радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R .

157. Изобразите правильную пирамиду $TUVWX$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через вершину T и прямую UW . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, учитывая, что площадь построенного сечения равна площади основания, а ребро основания равно l .

158. Пирамида V_1P_1QW имеет своими вершинами вершины куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рис. 120). Найдите полную поверхность этой пирамиды, учитывая, что ребро куба равно 1 м.

159. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABTV A_1B_1T_1V_1$ плоскостью AB_1T . Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a , а площадь построенного сечения равна S .

160. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью, проходящей через вершину I и прямую J_1L_1 . Найдите полную поверхность параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a , а угол J_1IL_1 равен γ .

161. Четырёхугольник $RBCY$ — сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую RY и точку A на луче SS_1 за точкой S_1 (рис. 121). Докажите, что это сечение есть равнобедренная трапеция, и найдите её площадь, учитывая, что основанием параллелепипеда является квадрат $RSYZ$ со стороной s , высота RR_1 параллелепипеда равна h , а вершина S_1 делит отрезок SA пополам.

162. Изобразите куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через прямую K_1T и такую точку A луча V_1T_1 , что вершина T_1 делит отрезок V_1A в от-

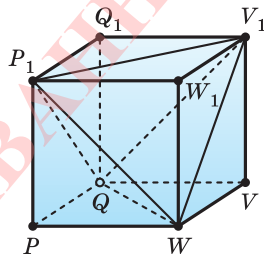


Рис. 120

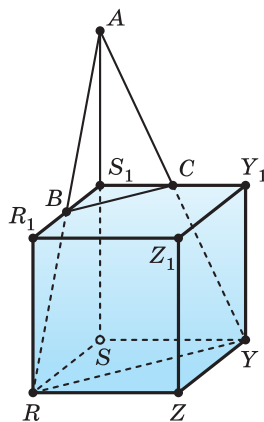


Рис. 121

ношении $2 : 1$, если считать от точки V_1 . Найдите периметр этого сечения, учитывая, что ребро куба равно 2 м.

163. Изобразите треугольную пирамиду $CDEF$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер FC , FD , FE . Найдите площадь грани пирамиды, учитывая, что все её грани — равные друг другу правильные треугольники, а площадь сечения равна 120 см^2 .

164. Точка A лежит на ребре PQ треугольной пирамиды $PQRS$, точка B — на луче QR за точкой R , а точка C — на плоскости QRS (рис. 122). Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC .

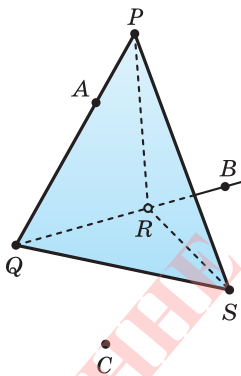


Рис. 122

165. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы равно a , а площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через концы рёбер, выходящих из одной вершины, равна Q . Найдите боковую поверхность призмы.

166. Площадь сечения правильной четырёхугольной пирамиды $RUSVW$ плоскостью RUV равна Q . Найдите боковую поверхность пирамиды.

167. Найдите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, учитывая, что:

а) $\cos \alpha = \frac{21}{29}$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$; ж) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{39}{52}$;

б) $\sin \alpha = \frac{12}{37}$; д) $\cos \alpha = \frac{11}{61}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{33}{56}$.

в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$; е) $\sin \alpha = \frac{60}{61}$;

168. Постройте график функции:

а) $y = 3x + 2$; в) $y = 3x - 2$;

б) $y = -3x + 2$; г) $y = -3x - 2$.

Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат.

169. Постройте график функции:

а) $y = x + 2$; в) $y = -\sqrt{3}x + 3$;

б) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1$; г) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Найдите угол, образованный верхней полупрямой с положительным направлением оси абсцисс.

170. Найдите угол между прямыми, которые являются графиками функций $y = 2x - 1$ и $y = -3x + 2$.

171. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

в) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

б) $y = \frac{x-2}{3-2x}$;

г) $y = \left| \frac{x-2}{3-2x} \right|$.

Найдите промежутки, на которых функция возрастает и на которых убывает.

172. Постройте график функции:

а) $y = 2(x - 2)^2 - 2$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$;

б) $y = \frac{2}{3(1-x)} + 1$;

г) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$.

Найдите промежутки, на которых функция принимает положительные значения и на которых — отрицательные.

173. Запишите область определения и область значений функции, график которой изображён на рисунке:

а) 123;

в) 125;

б) 124;

г) 126.

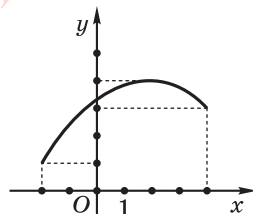


Рис. 123

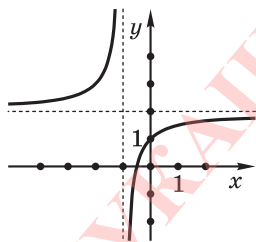


Рис. 124

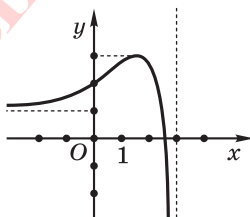


Рис. 125

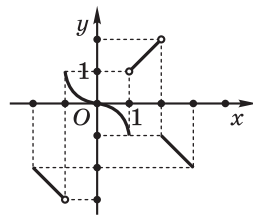


Рис. 126

174. Начертите график чётной и нечётной функций, учитывая, что для отрицательных значений аргумента он показан на рисунке:

а) 127;

в) 129;

б) 128;

г) 130.

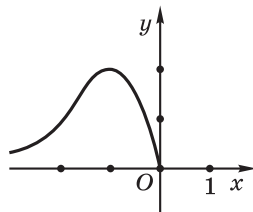


Рис. 127

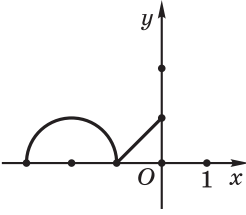


Рис. 128

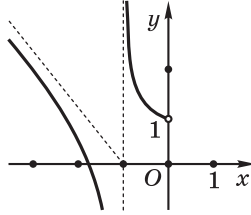


Рис. 129

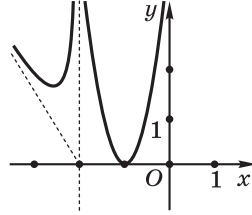


Рис. 130

175. Используя графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, приведённые на рисунках 131 и 132 соответственно, постройте график функции:

- | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|
| а) $y = f(x) + 2$; | г) $y = -0,5g(x)$; | ж) $y = f(x) + g(x)$; |
| б) $y = g(x) - 1$; | д) $y = f(0,5x)$; | з) $y = f(x) - g(x)$. |
| в) $y = 2f(x)$; | е) $y = g(-2x)$; | |

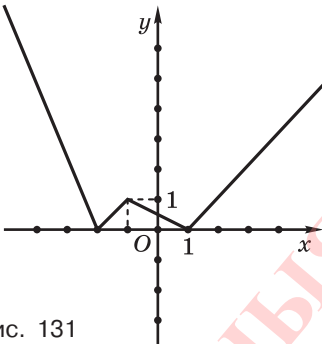


Рис. 131

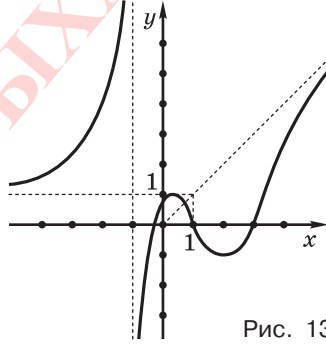


Рис. 132

176. Есть два многоугольника, суммы внутренних углов которых отличаются на 720° , а вместе эти углы составляют 2520° . Какие это многоугольники?

177. Велосипедист сначала ехал со скоростью 21 км/ч, а затем снизил её и с меньшей скоростью проехал 35 км. Найдите меньшую скорость движения велосипедиста, учитывая, что с ней он ехал на 1,5 ч больше, а средняя скорость на всём пути оказалась равной 16 км/ч.

178. На отрезке AB выбрана такая точка U , что $UB - UA = 6$ см, и на полученных частях UA и UB как на высотах построили такие треугольники APQ и UTV , что основание PQ первого из них равно 20 см, а площадь второго — 78 см^2 (рис. 133). Найдите длину отрезка AB , учиты-

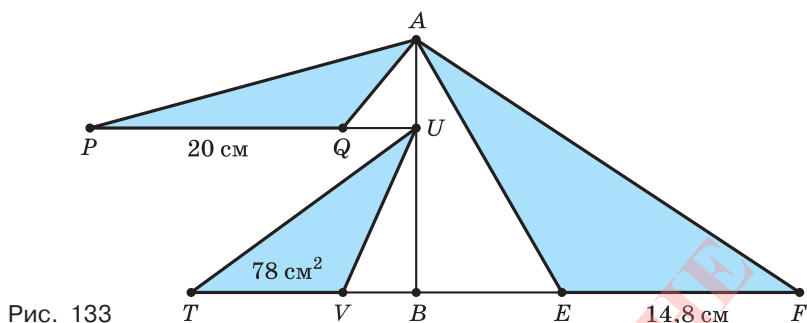


Рис. 133

вая, что когда на нём как на высоте построили третий треугольник AEF с площадью, равной сумме площадей треугольников APQ и UTV , то его основание EF оказалось равным 14,8 см.

179. Есть две коробки для укладывания конфет. Вместимость первой коробки равна 30 конфетам, а во второй коробке конфеты укладываются в 3 ряда и в одном ряду помещается на 3 конфеты больше. Найдите вместимость второй коробки, учитывая, что все конфеты из обеих коробок в точности помещаются в третью коробку, в которой в один ряд укладывается 6 конфет, и рядов столько, сколько их вместе в первой и второй коробках.

* * *

180. Учитывая, что $a + b + c = 2$ и $a^3 + b^3 + c^3 = 8$, найдите сумму $a^5 + b^5 + c^5$.

181. Докажите, что если положительные числа a, b, m, n удовлетворяют неравенству $ab > am + bn$, то они удовлетворяют и неравенству $\sqrt{a+b} > \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

182. Среди парабол $y = x^2 + px + q$ есть такие, которые пересекают оси координат в трёх различных точках. Докажите, что все окружности, заданные этими тройками точек, имеют общую точку.

II

раздел

Производная и её применения

4. Производная

Представим, что мы сели в машину и поехали. Понятно, что со временем t изменяется (увеличивается) пройденный путь s , изменяется и скорость v , т. е. путь s и скорость v являются функциями времени t .

Наш опыт говорит о том, что путь и скорость связаны между собой. Например, при равномерном движении путь, скорость и время связаны зависимостью $s = vt$. Общий способ описания связи между этими величинами изобрёл английский физик и математик Исаак Ньютон (1643—1727) (рис. 134). Открытие Ньютона дало возможность описать многие процессы, изучаемые физикой, химией, биологией, техническими науками, так как связи между величинами, характеризующими эти процессы, аналогичны связям между путём, скоростью и временем.



Рис. 134.
Исаак Ньютон

Понятие производной обобщает понятие скорости. При равномерном движении пройденный телом путь s прямо пропорционален времени движения t (рис. 135), причём скорость — это коэффициент пропорциональности, показывающий путь, пройденный за единицу времени. Для нахождения скорости можно путь $s_2 - s_1$, пройденный за время $t_2 - t_1$, разделить на это время:

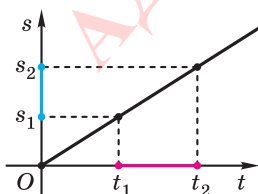


Рис. 135

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Выясним, что такое скорость произвольного движения, законы которого самые разнообразные.

Пусть тело движется по закону, график которого изображён на рисунке 136. За время $t_2 - t_1$ от момента t_1 до момента t_2 оно пройдёт путь $s_2 - s_1$. Тогда отношение $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ даёт среднюю скорость $\bar{v}$ движения тела на временном промежутке $[t_1; t_2]$:

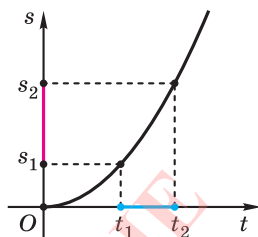


Рис. 136

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Для определения скорости тела в момент t , которую называют *мгновенной скоростью*, поступим так. Выберем временной промежуток $[t; t_1]$, найдём на нём среднюю скорость и будем уменьшать промежуток $[t; t_1]$, приближая t_1 к t . Если закон движения тела задаётся формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, то

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\frac{g}{2}(t_1^2 - t^2)}{t_1 - t} = \frac{g(t_1 - t)(t_1 + t)}{2(t_1 - t)} = \frac{g}{2}(t_1 + t).$$

Если теперь уменьшать промежуток времени $[t; t_1]$, приближая значение t_1 к точке t , то сумма $t_1 + t$ приближается к $t + t$, т. е. к $2t$, а выражение $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ приближается к $\frac{g}{2} \cdot 2t$, т. е. к gt . Число gt — значение мгновенной скорости в момент t . Получили хорошо известную вам формулу

$$v = gt,$$

выражающую зависимость скорости от времени при свободном падении тела.

Действие, похожее на переход от средней скорости на промежутке $[t; t_1]$ к мгновенной скорости в точке t , называется *действием предельного перехода*. Говорят, что при стремлении t_1 к t выражение $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ стремится к gt , и записывают:

$$\frac{g}{2}(t_1 + t) \xrightarrow{t_1 \rightarrow t} gt, \quad \text{или} \quad \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{g}{2}(t_1 + t) = gt.$$

Таким образом, мгновенная скорость в момент t является пределом средней скорости при стягивании промежутка, на котором она измеряется, в точку, т. е.

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$



Рис. 137.
Готфрид Лейбниц

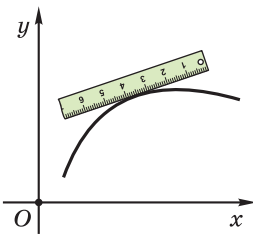


Рис. 138



Рис. 139.
Гийом Лопиталь

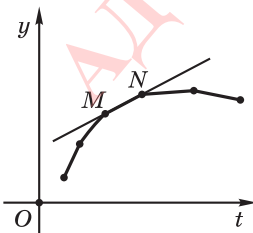


Рис. 140

К подобным выводам пришёл и немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716) (рис. 137), решая задачу о проведении касательной к произвольной кривой.

Наглядное представление о касательной даёт край линейки, приложенной в выбранной точке к сделанной из проволоки кривой (рис. 138).

Когда мы ножницами вырезаем из бумаги криволинейную фигуру, то эта линия представляет собой ломаную из очень маленьких звеньев. Именно так рассматривали кривую создатели математического анализа. В первом учебнике по анализу, написанном 300 лет назад Гийомом Лопиталем (1661—1704) (рис. 139), касательная определяется так: «Если продлить одно из маленьких звеньев ломаной, из которых состоит кривая линия, то эта продлённая прямая называется касательной к кривой» (рис. 140).

Посмотрим в микроскоп на параболу $y = x^2$ в окрестности точки $A(1; 1)$. На рисунке 141, где эта парабола изображена без увеличения, отчётливо видна искривлённость линии, на рисунке 142, на котором окрестность точки A увеличена в 10 раз, искривление едва заметно, а на рисунке 143, где окрестность точки A

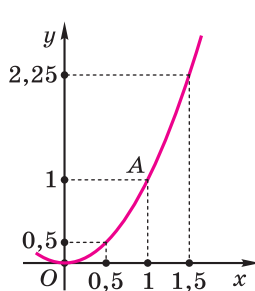


Рис. 141

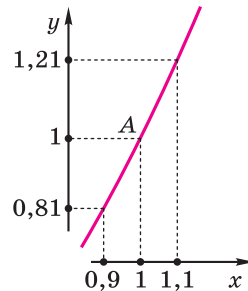


Рис. 142

увеличена в 100 раз, участок параболы визуально не отличается от отрезка прямой, которая и является касательной к параболе в точке A .

Уточним это представление о касательной к кривой. Пусть дана некоторая кривая l и точка A на ней (рис. 144). Выберем на кривой другую точку A_1 и проведём прямую AA_1 , которую называют *секущей*. Будем приближать точку A_1 к точке A . При этом секущая будет поворачиваться вокруг точки A и стремиться к некоторому предельному положению, которое и является касательной к кривой в точке A .

Переведём описанный процесс на точный язык формул. Пусть кривая l — график функции $y = f(x)$ (рис. 145). Пусть абсциссы точек A и A_1 соответственно равны x и x_1 , тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x_1)$. Касательной к кривой l в точке A является определённая прямая, проходящая через точку A . Положение касательной зависит от углового коэффициента a . Найдём сначала угловой коэффициент a_1 секущей AA_1 . Он равен тангенсу угла α , образованного прямой AA_1 с положительным направлением оси абсцисс. Как показывает рисунок 145,

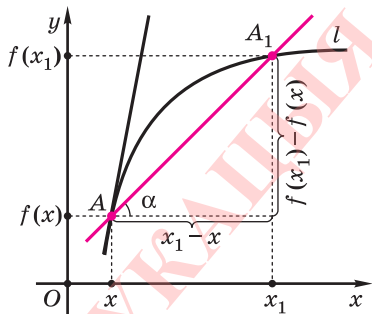


Рис. 145

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Чтобы найти угловой коэффициент a , будем приближать x_1 к x . Тогда точка A_1 будет приближаться к точке A , а секущая AA_1 — к касательной в точке A . Иными словами, угловой коэффициент a есть предел выражения $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x :

$$a(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

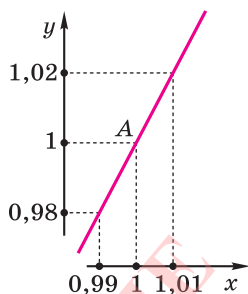


Рис. 143

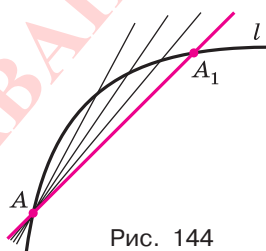


Рис. 144

Мы получили ту же задачу, что и при нахождении скорости: выполнить предельный переход в выражении $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x . Этот предельный переход является новым математическим действием, которое выполняется над функцией и называется *дифференцированием функции*, или *нахождением производной функции*.

Математический анализ, который был создан Ньютоном и Лейбницем во второй половине XVII в., около двух столетий развивался на основе интуитивного понятия производной как скорости изменения функции. Строгое математическое определение производной стало возможным только в конце XIX ст. после уточнения основных понятий математического анализа — действительного числа, функции, предела.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x .

Разность $x_1 - x$ значений аргумента называют *приращением аргумента* и обозначают Δx (читается *дельта икс*), а разность $f(x_1) - f(x)$ соответствующих значений функции $y = f(x)$ называют *приращением функции* и обозначают Δy . Тогда средняя скорость изменения функции есть выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Стягивание промежутка $[x_1; x]$ в точку x означает стремление Δx к нулю. Производную функции $y = f(x)$ обозначают y' , или f' .

Введённые обозначения позволяют так переформулировать определение производной.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая определение производной, получаем, что

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = s'(t),$$

$$a(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x),$$

т. е. что мгновенная скорость v в момент t тела, которое движется по закону $s = s(t)$, равна значению производной $s'(t)$ в момент t , а угловой коэффициент a касательной $y = ax + b$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$ равен значе-

нию производной $f'(x)$ в точке с абсциссой x . Понятно, что значение производной зависит от выбора значения x , и поэтому производная данной функции — также функция с аргументом x .

Нахождение производной требует выполнения предельного перехода. Его сущность заключается в определении того, как себя ведёт функция $y = f(x)$ при приближении аргумента x к определённому значению a . Рассмотрим, например, функцию $y = 3 - x^2$ и будем приближать аргумент x к числу 2, оформив вычисления таблицей.

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
y	-6	-3,25	-1,41	-1,0401	-1,004001	-1,00040001

Можно заметить, что при приближении значения аргумента x к числу 2 значение функции приближается к числу -1 , а это есть значение функции для значения аргумента, равного 2 (рис. 146). Так ведут себя все функции, которые в точке $x = a$ не имеют разрыва: предел функции при стремлении аргумента к числу a из области определения равен значению функции в точке a , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Этот факт отражает важнейшее свойство элементарных функций во всех точках из области определения, которое будем называть *принципом непрерывности*. Его на языке приращений можно записать так:

если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$.

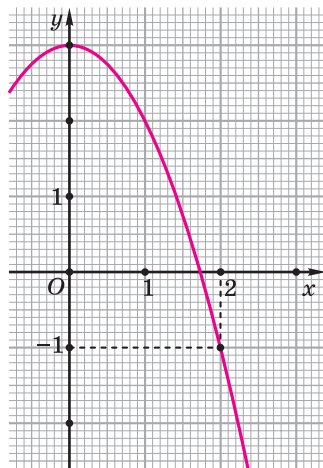


Рис. 146



1. Как связаны между собой средняя скорость движения на малом промежутке $[t; t_1]$ и мгновенная скорость движения в момент t ?
2. Как связаны между собой угловой коэффициент секущей, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x и x_1 , и угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке с абсциссой x ?
3. Что называется приращением аргумента и как это приращение обозначается?

4. Что называется приращением функции и как это приращение обозначается?
5. Что называется производной функции $y = f(x)$ и как она обозначается?
6. Как находится мгновенная скорость v тела в момент t , если оно движется по закону $s = s(t)$?
7. Как угловой коэффициент a касательной $y = ax + b$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$ связан со значениями функции $f'(x)$?

183. Тело движется по закону $s = 3t - 1$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

- а) $[0; 1]$; б) $[0; 5]$; в) $[-3; 3]$; г) $[t_1; t_2]$.

184. Тело движется по закону $s = t^2 + 3t$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

- а) $[0; 1]$; б) $[-1; 1]$; в) $[2; 5]$; г) $[t_1; t_2]$.

185. Тело движется по закону $s = \frac{2}{t+1}$. Найдите среднюю скорость $\bar{v}$ на временном промежутке:

- а) $[0; 1]$; б) $[0; 3]$; в) $[1; 9]$; г) $[t_1; t_2]$.

186. На рисунке 147 изображён график зависимости пути s от времени t . Найдите среднюю скорость движения на временном промежутке:

- а) $[0; 4]$; б) $[0; 2]$; в) $[0; 1]$; г) $[0; 0,5]$; д) $[3; 4]$;
 е) $[2; 4]$; ж) $[1; 2]$; з) $[1,5; 2]$; и) $[2; 3]$; к) $[2; 2,5]$.



Рис. 147

187. Точка движется прямолинейно по закону $s = 3t + 2$. Найдите:

- а) среднюю скорость движения на промежутке $[2; 2,2]$;
 б) среднюю скорость движения на промежутке $[3; 4]$;
 в) мгновенную скорость при $t = 2$;
 г) мгновенную скорость при $t = 3$.

188. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2$. Найдите:

- а) среднюю скорость движения на промежутке $[1; 2]$;
 б) среднюю скорость движения на промежутке $[1; 1,2]$;
 в) среднюю скорость движения на промежутке $[1; 1,02]$;
 г) среднюю скорость движения на промежутке $[2; 2,02]$;
 д) мгновенную скорость при $t = 1$;
 е) мгновенную скорость при $t = 2$.

189. На рисунке 148 изображена графиком зависимость пути от времени. Найдите:

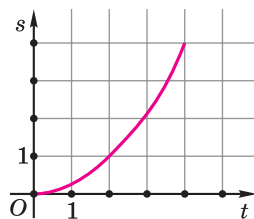


Рис. 148

а) среднюю скорость движения на промежутке $[0; 4]$;

б) среднюю скорость движения на промежутке $[2; 4]$;

в) среднюю скорость движения на промежутке $[3; 4]$;

г) среднюю скорость движения на промежутке $[3; 5; 4]$;

д) мгновенную скорость при $t = 2$;

е) мгновенную скорость при $t = 3$.

190. Учитывая, что на рисунке 149 изображён график зависимости перемещения x от времени t :

а) определите, на каких промежутках средняя скорость движения была наибольшей;

б) определите, в какой точке мгновенная скорость движения была наибольшей;

в) приведите примеры промежутков времени, на которых средние скорости одинаковы;

г) приведите примеры моментов времени, на которых мгновенные скорости одинаковы.

191. По графику зависимости пути s от времени t на рисунке 150 найдите скорость движения в момент t , равный:

а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = 2$; г) $t = 3$.

192. Постройте график зависимости скорости от времени, учитывая, что зависимость пути от времени представлена на рисунке 150.

193. Постройте график зависимости скорости от времени, учитывая зависимость перемещения x тела от времени t при упругом ударе, изображённую на рисунке 151.

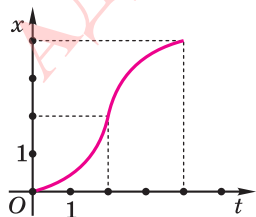


Рис. 149

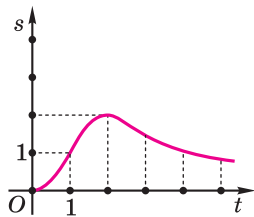


Рис. 150

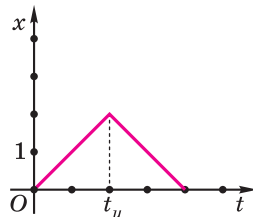


Рис. 151

194. Постройте график функции $y = x^2$. Найдите угловой коэффициент секущей, проходящей через точки этого графика с абсциссами:

- а) -1 и 0 ; в) -1 и 3 ; д) 0 и 3 ;
 б) -1 и 1 ; г) 0 и 1 ; е) 1 и 3 .

195. На рисунке 152 изображён график некоторой функции и его точки B , B_1 , B_2 , B_3 . Определите угловой коэффициент секущей:

- а) BB_1 ; в) BB_3 ; д) B_1B_3 ;
 б) BB_2 ; г) B_1B_2 ; е) B_2B_3 .

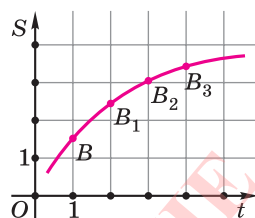


Рис. 152

196. На рисунках 153—158 изображены графики трёх функций и трёх их производных. Запишите пары номеров рисунков, первый компонент каждой из которых указывает график функции, второй — график её производной.

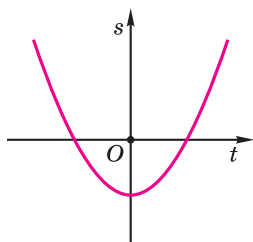


Рис. 153

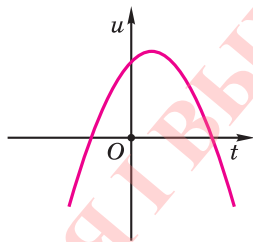


Рис. 154

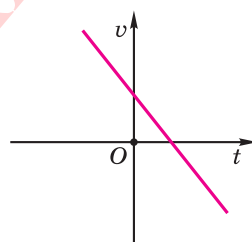


Рис. 155

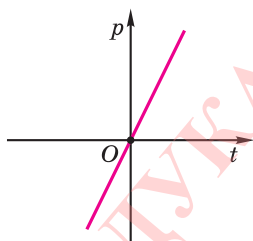


Рис. 156

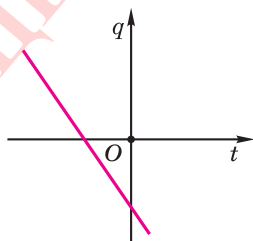


Рис. 157

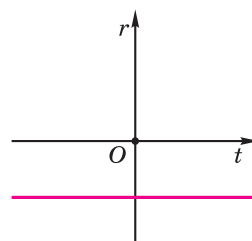


Рис. 158

197. На рисунке 159 показан способ построения графика скорости по графику пути. Опишите этот способ и, используя его, постройте график производной функции, заданной графиком на рисунке:

- а) 160; б) 161; в) 162.

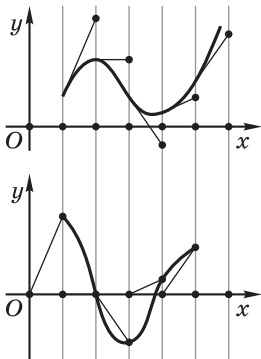


Рис. 159

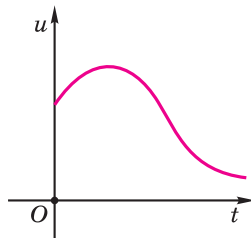


Рис. 160

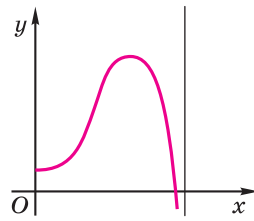


Рис. 161

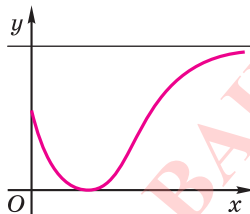


Рис. 162

198. Постройте примерный график производной функции, которая задана графиком на рисунке:

- а) 163; б) 164.

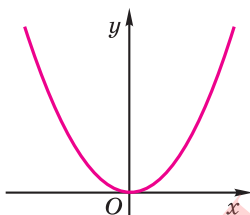


Рис. 163

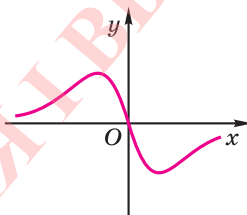


Рис. 164

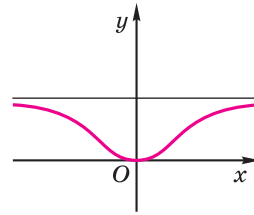


Рис. 165

199. Нарисуйте примерный график функции, график производной которой изображён на рисунке:

- а) 165; б) 166.

200. Для функции $y = 2x + 5$ найдите:

- а) x_1 и Δy , учитывая, что $x = 3$ и $\Delta x = 0,2$;
 б) x_1 и Δy , учитывая, что $x = 4$ и $\Delta x = 0,06$;
 в) Δy , учитывая, что $x = 4$ и $\Delta x = 0,1$;
 г) Δy , учитывая, что $x = 7$ и $\Delta x = 0,01$.

201. Для функции $y = x^2$ найдите приращение Δx и Δy , учитывая, что:

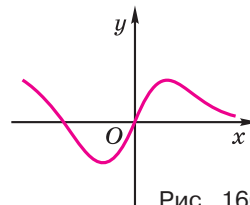


Рис. 166

а) $x_1 = 2,5$ и $x = 2$;

в) $x_1 = -1,2$ и $x = -1$;

б) $x_1 = 3,9$ и $x = 3,75$;

г) $x_1 = -2,7$ и $x = -2,5$.

202. Для функции $y = x^2 - x$ найдите Δy , учитывая,

что:

а) $x = 1,5$ и $\Delta x = 2,5$;

в) $x = 4$ и $\Delta x = 3$;

б) $x = 1,5$ и $\Delta x = 3,5$;

г) $x = -7$ и $\Delta x = 1,2$.

203. Есть функция $y = \frac{1}{x}$. Найдите Δy и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, учитывая,

что:

а) $x = 9$, $\Delta x = 0,06$;

в) $x = 4,02$, $\Delta x = -0,02$;

б) $x = 4,96$, $\Delta x = 0,04$;

г) $x = 6$, $\Delta x = -0,02$.

204. Найдите среднюю скорость роста функции $y = x^2 - 4x$ на промежутке:

а) $[0; 1]$;

б) $[0; 0,5]$;

в) $[0; 0,1]$;

г) $[0; 0,01]$.

Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.

205. Определите, у какой из функций — f_1 или f_2 — больше скорость роста их графиков на рисунке:

а) 167;

б) 168;

в) 169.

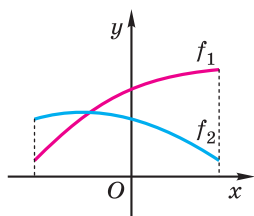


Рис. 167

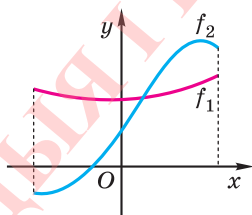


Рис. 168

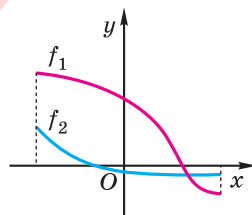


Рис. 169

206. Определите, на каком из промежутков $[a; b]$ или $[b; c]$ больше скорость роста функции, график которой изображён на рисунке:

а) 170;

б) 171.

207. Выразите приращение функции в точке x через x и Δx , учитывая,

что:

а) $y = 5 - 3x$;

в) $f(x) = 3x^2$;

б) $y = 2\sqrt{x}$;

г) $f(x) = 2x - x^2$.

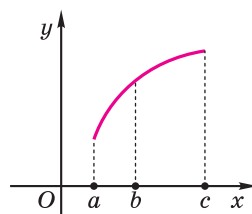


Рис. 170

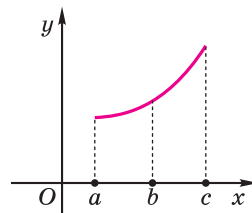


Рис. 171

208. Найдите $f(x + \Delta x)$, $f(x + \Delta x) - f(x)$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

учитывая, что:

а) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

б) $f(x) = ax + b$;

г) $f(x) = x^3$.

209. Докажите:

а) признак возрастания: функция f возрастает на промежутке I тогда и только тогда, когда для любых двух значений x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка I выполняется условие $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$;

б) аналогичный признак убывания функции на промежутке I , предварительно сформулировав его.

210. Пользуясь признаками возрастания и убывания функции (см. упражнение **209**), найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = 2x + 3$;

в) $g(x) = 7 - 5x$;

б) $p(x) = x^2$;

г) $g(x) = 3 - x^2$.

211. Найдите значение производной функции $y = 2x - 3$ в точке:

а) 1; б) 3; в) x_0 .

212. Докажите, что значение производной линейной функции $y = kx + b$ в любой точке x равно угловому коэффициенту прямой, являющейся графиком этой функции. Какое уравнение задаёт касательную к графику функции $y = kx + b$, проходящей через точку с абсциссой x_0 ?

213. Для функции $y = \frac{x^2}{2}$ вычислите значения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x = \frac{1}{2}$ при Δx , равном:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{32}$; д) $\frac{1}{100}$; е) $\frac{1}{1000}$.

214. Найдите значение производной функции $y = x^2 - x$ в точке:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0 .

215. Для функции $y = \frac{1}{x}$ определите, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю, в точке:

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0 .

216. Упростите выражение:

а) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; в) $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}{a - b}$;

б) $\frac{a^3 + b^3}{a^3b - ab^3}$; г) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$.

217. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{1 - 25x^2} + \frac{1}{25x^2 - 10x + 1}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$;

б) $\frac{y}{9 - 4y^2} + \frac{1}{4y + 6}$; г) $\frac{m + 2}{m^2 - 2m} - \frac{m - 2}{m^2 + 2m}$.

218. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$.

219. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1 - x^{-0,5}}{1 + x^{-0,5}} + \frac{1 + x^{-0,5}}{1 - x^{-0,5}} \right) : \frac{1 + x}{1 - x}$;

б) $\left(\frac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a - b} \right) (a^{0,5} + b^{0,5})$;

в) $\left(\frac{ab^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{a^{0,5}b}{a^{0,5} - b^{0,5}} \right) : \frac{-1}{a^{-0,5}b^{-0,5}}$;

г) $\frac{x + \sqrt{x^2 - xy}}{x - \sqrt{x^2 - xy}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - xy}}{x + \sqrt{x^2 - xy}}$.

220. Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием 12 и углом при вершине в 120° .

221. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом 60° и относятся как 5 : 8, а его площадь равна $160\sqrt{3}$. Найдите периметр параллелограмма.

222. Найдите высоты равнобедренного треугольника с основанием 18 и боковой стороной 15.

223. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 6 м/с, другое со скоростью 21 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 12 м/с. Найдите импульсы тел, учитывая, что масса первого тела на 1 кг больше.

224. Два тела массами 3 кг и 8 кг движутся в одном направлении так, что скорость второго тела на 18 м/с больше.

Найдите эти скорости, учитывая, что если бы третье тело имело импульс, равный суммарному импульсу первого и второго тел, и двигалось со скоростью, равной сумме скоростей первого и второго тел, то его масса была бы равной 7 кг.

* * *

225. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

226. Когда в треугольнике ABC провели высоты AM , BN , CK , то оказалось, что треугольники ABC и MNK подобны. Найдите возможные значения углов A , B , C .

227. Внутреннюю точку Q выпуклого четырёхугольника $ABCD$ с площадью S соединили с вершинами и нашли точки M , N , K , L , в которых пересекаются медианы треугольников QAB , QBC , QCD , QDA соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $MNKL$.

5. Правила нахождения производных

В соответствии с определением $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при нахождении производной можно пользоваться следующимписанием.

- Найти приращение Δy функции $y = f(x)$ на промежутке $[x; x + \Delta x]$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

- Разделить приращение функции Δy на приращение аргумента Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Найти предел выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Действие нахождения производной функции называется *дифференцированием функции*.

Функция, имеющая производную, называется *дифференцируемой функцией*.

Теорема 1. *Истинны следующие формулы дифференцирования:*

$$c' = 0; \quad (ax^2)' = 2ax;$$

$$(ax + b)' = a; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Доказательство. Найдём производную постоянной функции $y = c$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$\text{Поэтому} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Мы посчитали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, так как выражение 0 не зависит от Δx .

Найдём производную функции $y = ax + b$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = \\ &= ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a. \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a.$$

Найдём производную функции $y = ax^2$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = \\ &= ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

$$\text{Поэтому} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax.$$

Мы посчитали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax$, так как выражение $2ax$ не зависит от Δx , а выражение $a\Delta x$ стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю.

Найдём производную функции $y = \frac{1}{x}$. Будем иметь:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

$$\text{Поэтому} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Мы посчитали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}$, так как выражение $x + \Delta x$ стремится к x , когда Δx стремится к нулю.

► **Пример 1.** Найдём производную функции $y = x^3$. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Мы посчитали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$, так как выражение $3x^2$ не зависит от Δx , а выражение $3x\Delta x + (\Delta x)^2$ стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю.

Таким образом, $(x^3)' = 3x^2$.

Пример 2. Найдём производную функции $y = \sqrt{x}$. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.\end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Мы посчитали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, так как выражение $\sqrt{x + \Delta x}$ стремится к $\sqrt{x}$, когда Δx стремится к нулю.

Таким образом, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ◀

Теорема 2. Если функции u и v дифференцируемы, то производные их суммы, произведения, частного выражаются формулами:

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Найдём правило нахождения производной суммы функций. Пусть $y = u(x) + v(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) = \\ &= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)).\end{aligned}$$

Теперь учтём, что $u(x + \Delta x) - u(x)$ является приращением Δu функции $u(x)$, а $v(x + \Delta x) - v(x)$ — приращением Δv функции $v(x)$. Поэтому:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta u + \Delta v; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Поскольку функции u и v дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Значит,

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Найдём правило нахождения производной произведения функций. Пусть $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Теперь учтём, что приращение $u(x + \Delta x) - u(x)$ функции $u(x)$ можно записать как $u(x) + \Delta u$, а приращение $v(x + \Delta x) - v(x)$ функции $v(x)$ — как $v(x) + \Delta v$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = u(x)v(x) + u(x)\Delta v + \\ &+ v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Поскольку функции u и v дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v',$$

а в соответствии с принципом непрерывности

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0.$$

$$\text{Поэтому} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v(x) + v'u(x) + u' \cdot 0 = u'v + v'u.$$

Найдём правило нахождения производной частного функций. Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда $u = yv$. Используя формулу для производной произведения, получаем:

$$u' = y'v + yv'.$$

Из этой формулы выразим y' и учтём, что $y = \frac{u}{v}$:

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Следствие 1. *Константу можно выносить за знак производной:*

$$(cu)' = cu'.$$

Действительно, применив формулу для производной произведения, получаем:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu'.$$

Следствие 2. $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}.$

Следствие 3. $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$

Действительно, применив формулу для производной суммы и следствие 1, получаем:

$$(ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' = a(x^2)' + b(x)' + c' = a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b.$$

Пример 3. Найдём производную функции $z = \frac{1}{t} + t^2$.
Имеем:

$$z' = \left(\frac{1}{t} + t^2\right)' = \left(\frac{1}{t}\right)' + (t^2)' = -\frac{1}{t^2} + 2t = 2t - \frac{1}{t^2}.$$

Следствие 4. *Производная разности дифференцируемых функций равна разности их производных:*

$$(u - v)' = u' - v'.$$

Действительно, с учётом теоремы 2 и следствия 1 имеем:

$$(u - v)' = (u + (-v))' = u' + (-1 \cdot v)' = u' + (-1) \cdot v' = u' - v'.$$

Пример 4. Найдём производную функции $y = 5x^2 - \frac{4-x}{x^2}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= (5x^2)' - \left(\frac{4-x}{x^2}\right)' = 5(x^2)' - \frac{(4-x)' \cdot x^2 - (4-x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= 10x - \frac{(-1) \cdot x^2 - (4-x) \cdot 2x}{x^4} = 10x - \frac{x(-x-8+2x)}{x^4} = \\ &= 10x - \frac{x-8}{x^3} = \frac{10x^4 - x + 8}{x^3}. \end{aligned}$$

Следствие 5. Если n — целое число, то:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

► Действительно, если n равно 0, 1 или 2, то, как установлено в теореме 1, $1' = 0$, $x' = 1$ и $(x^2)' = 2x$. Эти результаты можно рассматривать как значения выражений $0 \cdot x^{-1}$, $1 \cdot x^0$ и $2 \cdot x^1$.

Пусть равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$ истинно. Тогда

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = \\ &= kx^k + x^k = (k+1)x^k,\end{aligned}$$

т. е. истинно и равенство $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$.

Теперь с учётом принципа математической индукции можно сделать вывод о том, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ истинна при всех натуральных значениях переменной n .

Пусть n — отрицательное целое число, т. е. $n = -m$, где m — натуральное число. Тогда, используя определение отрицательной степени и формулу для производной частного, получаем:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1} \cdot 1}{x^{2m}} = \\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.\end{aligned}$$

Формула дифференцирования $(x^n)' = nx^{n-1}$ истинна и для дробных показателей. Убедимся в этом для случая $n = \frac{1}{2}$, т. е. для функции $y = \sqrt{x}$. С одной стороны, мы знаем, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, с другой стороны, по формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ получаем:

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найдём производную функции $s = 7t^4 - \frac{3}{t^5}$.
Имеем:

$$\begin{aligned}s' &= \left(7t^4 - \frac{3}{t^5}\right)' = (7t^4)' - (3t^{-5})' = 7 \cdot 4t^3 - 3 \cdot (-5)t^{-6} = \\ &= 28t^3 + \frac{15}{t^6} = \frac{28t^9 + 15}{t^6}.\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $z = (6x - 7)^{47}$. Мы можем найти производную этой функции, представив её многочленом со-

рок седьмой степени, который имеет 48 слагаемых. Однако можно достичь цели и более просто, обратив внимание на то, что функцию $z = (6x - 7)^{47}$ можно рассматривать как композицию функций $y = 6x - 7$ и $z = y^{47}$.

► Пусть есть функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функцию $h = g(f(x))$ называют *сложной функцией*, образованной из функций g и f . Для вычисления значения сложной функции $h = g(f(x))$ в произвольной точке x сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а потом значение z функции g в точке y . Так, чтобы найти значение функции $z = (6x - 7)^{47}$ при $x = 1$, сначала находим, что $6 \cdot 1 - 7 = -1$, а затем, что $(-1)^{47} = -1$.

Теорема 3. Если функция f имеет производную в точке x , а функция g — производную в точке $y = f(x)$, то сложная функция $h = g(f(x))$ также имеет производную в точке x и

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Доказательство. Пусть функция f имеет производную в точке x , а функция g — производную в точке $y = f(x)$. Пусть $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$, $\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) = g(y + \Delta y) - g(y) = \Delta g$.

Будем считать, что $\Delta f \neq 0$ в некоторой окрестности точки x . Тогда

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда, поскольку f — дифференцируемая функция, по принципу непрерывности получаем, что $\Delta y \rightarrow 0$. Значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$, так как $\Delta x \rightarrow 0$, а $\frac{\Delta g}{\Delta y} \rightarrow g'(y)$, так как $\Delta y \rightarrow 0$. И поэтому $h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.

Пример 6. Найдём производные функций $z = (5x - 7)^{47}$ и $h = \sqrt{5t^8 - 3t^2}$. Имеем:

$$\begin{aligned} z' &= ((5x - 7)^{47})' = 47(5x - 7)^{46} \cdot (5x - 7)' = \\ &= 47(5x - 7)^{46} \cdot 5 = 235(5x - 7)^{46}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h' &= \left(\sqrt{5t^8 - 3t^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (5t^8 - 3t^2)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (40t^7 - 6t) = \frac{20t^7 - 3t}{\sqrt{5t^8 - 3t^2}}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Мы знаем, что операция дифференцирования ставит в соответствие данной функции $f(x)$ новую функцию — её производную, функцию $f'(x)$. В математике важной является обратная задача: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой и есть $f(x)$. Такую функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$.

Пример 7. Функции $F_1(x) = 3x^4 + 7$ и $F_2(x) = 3x^4$ являются первообразными для функции $f(x) = 12x^3$ на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел, поскольку

$$F_1'(x) = (3x^4 + 7)' = 3(x^4)' + 0 = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3 = F_2'(x) = f(x)$$

для всех значений переменной x из $\mathbb{R}$.



1. Что называется производной функции и по какой схеме она находится?

2. Чему равна производная константы; линейной функции; функции $y = \frac{1}{x}$?

3. Чему равна производная суммы функций; произведения функций; частного функций?

228. Пользуясь определением, найдите значения производной функции:

а) $h(x) = x^2$ в точках 2 и 5;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках 1 и 4.

229. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3 - x + 2$ в точке с абсциссой:

а) -2; б) -1; в) 0.

230. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите:

а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(25)$; г) $f'(x)$.

231. Пользуясь определением, найдите производную функции:

а) $y = 2x^2 + 3x$; д) $y = \frac{1}{x^3}$; и) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $y = 2x^3$; е) $y = \frac{x}{x+1}$; к) $y = \sqrt{x+1}$;

в) $y = x^3 + x$; ж) $y = \frac{x}{x+2}$; л) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

г) $y = \frac{2}{x}$; з) $y = -\frac{1}{2x^2}$; м) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

232. Найдите производную функции:

а) $y = 3x^2$; д) $y = \frac{2}{x}$; и) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$;
б) $y = 4x^4$; е) $y = \frac{1}{2x}$; к) $y = \sqrt{2x}$;
в) $y = \frac{x^2}{2}$; ж) $y = 3\sqrt{x}$; л) $y = -\sqrt{3x}$;
г) $y = \frac{x^3}{3}$; з) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$; м) $y = x + \frac{1}{x}$.

233. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$ в точке с абсциссой:

а) -1; б) 0; в) 1.

234. Для функции $g(y) = \frac{1}{y^2}$ найдите:

а) $g'(1)$; б) $g'(-1)$; в) $g'(2)$; г) $g'(y)$.

235. Найдите производную функции:

а) $y = (c^2 - 1)(c^2 + 1)$; ж) $y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}$;
б) $y = (c + \sqrt{c})^2$; з) $y = \frac{1}{c^3 + 1}$;
в) $y = \frac{3}{c - 2}$; и) $y = \left(c + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right)(c^2 + c + 1)$;
г) $y = \frac{c}{c - 1}$; к) $y = \left(c^4 - \frac{1}{c^4}\right)\left(c^3 + \frac{1}{c^3}\right)$;
д) $y = \frac{c^2}{c + 1}$; л) $y = \left(c + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)(c^2 - 3c - 8)$;
е) $y = \frac{c - 2}{2c^2 - 1}$; м) $y = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt{c - 1}}$.

236. Имеются функции: $g(y) = 2 - y^2$; $h(y) = \sqrt{y}$; $f(y) = \frac{y}{y - 3}$. Задайте формулой функцию:

а) $g(h(y))$; в) $g(f(y))$; д) $h(f(y))$;
б) $h(g(y))$; г) $f(g(y))$; е) $f(h(y))$.

237. Запишите функции, композицией которых является функция:

а) $p = \sqrt{9 - z^2}$; в) $p = \sqrt{z^2 - 0,25}$; д) $p = \sqrt{2 - \sqrt{d}}$;
б) $p = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$; г) $p = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 7}}$; е) $p = \sqrt{\frac{1}{d} + 1}$;

$$\text{ж)} p = \frac{1}{\sqrt{3-d}-1}; \quad \text{з)} p = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-d}}}.$$

238. Найдите такую функцию f , что $f(g(x)) = x$, учитывая, что:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} g(x) = x^2 \text{ и } x \geq 0; & \text{г)} g(x) = 2x; \\ \text{б)} g(x) = \sqrt{x}; & \text{д)} g(x) = 3x + 2; \\ \text{в)} g(x) = \frac{1}{x}; & \text{е)} g(x) = x^2 + 1, x \leq 0. \end{array}$$

239. Найдите производную функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} (2y - 7)^{14}; & \text{е)} \sqrt{5y - 8}; & \text{л)} (5e - 2)^{13} - (3e + 7)^{20}; \\ \text{б)} (3 + 5y)^{10}; & \text{ж)} \sqrt{7 - 4y}; & \text{м)} (3e - 1)^{15} + (2e + 3)^4; \\ \text{в)} (7y - 1)^{-3}; & \text{з)} \sqrt{4a^2 - 1}; & \text{н)} \sqrt{6e - 8} - \sqrt{4e^2 - 3}; \\ \text{г)} \left(\frac{1}{3}y + 2\right)^{-5}; & \text{и)} \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + 7}; & \text{о)} \sqrt{9 + 2e} - \sqrt{0,5e^2 - 2}; \\ \text{д)} \sqrt{2y + 3}; & \text{к)} \sqrt{9a^2 - 16}; & \text{п)} \sqrt{7 - 3a^3}. \end{array}$$

240. Найдите производную функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} y = (m - 3)^7; & \text{д)} y = (m + 1)^2 - 3m; & \text{и)} y = \sqrt{-m}; \\ \text{б)} y = (3m - 4)^9; & \text{е)} y = \frac{1}{(3m + 1)^3}; & \text{к)} y = \sqrt{5m - 1}; \\ \text{в)} y = (1 - 2m)^4; & \text{ж)} y = \frac{2}{(3m + 2)^3}; & \text{л)} y = \sqrt{(m + 2)^5}; \\ \text{г)} y = (1 - m)^5; & \text{з)} y = \sqrt[3]{5m^2}; & \text{м)} y = \sqrt[3]{2m - 7}. \end{array}$$

241. Вычислите производную:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} z = (\sqrt{x} + 1)^5; & \text{в)} z = \sqrt{1 + \sqrt{x}}; & \text{д)} z \sqrt[3]{2x^3 - 1}; \\ \text{б)} z = \sqrt{x^5 + 1}; & \text{г)} z = ((x + 1)^4 - 2)^3; & \text{е)} z = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}. \end{array}$$

242. Выведите формулу $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$ и вычислите с её помощью производную:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} y = (\sqrt{b} + 1)^2; & \text{в)} y = \left(b + \frac{1}{b} - \sqrt{b}\right)^2; \\ \text{б)} y = (b^3 + 2b^2 + b - 1)^2; & \text{г)} y = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2. \end{array}$$

243. Из функций $y = \frac{1}{2}x^2 + x$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = -\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ выберите ту, в которой при нулевом значении аргумента самая большая производная.

244. Определите, в какой из двух точек x_1 и x_2 функция $y = 3x^2$ растёт быстрее, учитывая, что:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

245. Найдите производную функции:

а) d^{10} ; е) $\frac{5}{z^{11}}$; л) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$;

б) $2d^7$; ж) $\frac{1}{3z^{-3}}$; м) $\frac{3}{\sqrt{b}}$;

в) d^{-5} ; з) $\frac{6}{z^7}$; н) $g^7 - 3g^2 - g + 5$;

г) $3d^{-3}$; и) $8\sqrt{b}$; о) $2g^{10} - g^8 + 3g^3$;

д) $\frac{1}{z^4}$; к) $3\sqrt{b^{-3}}$; п) $2g^6 - \frac{1}{g}$.

246. Найдите производную функции:

а) $7h^5 + 2\sqrt{h}$; л) $\frac{1}{h\sqrt{h}} + \sqrt{h^3}$;

б) $\frac{1+2t}{3-5t}$; м) $\frac{3t-2}{4-6t}$;

в) $(n+1)\sqrt{n}$; н) $\frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

г) $\frac{2f}{1+f^2}$; о) $(3+f^2)(2-\sqrt{f})$;

д) $\frac{1}{g^2} - 3g^4$; п) $(i^3 + i^2)(\sqrt{2i} - \sqrt{i})$;

е) $\frac{h}{3} - \frac{7}{2h^2}$; р) $h\sqrt{h} - \frac{2}{\sqrt{h}} - \frac{3}{h^2}$;

ж) $\frac{3t-2}{5t+8}$; с) $\frac{1-7t}{1-9t}$;

з) $(2n-1)\sqrt{n}$; т) $\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$;

и) $\frac{\sqrt{f}}{4+f}$; у) $\left(2 - \frac{f}{3} + \sqrt{f^3}\right)(7-f^2)$;

к) $\frac{\sqrt{x+7}}{4+x}$; ф) $\frac{3v^2 - \sqrt{v}}{2v + v^3}$.

247. Докажите, что $|x|' = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ \text{не существует,} & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

248. Найдите область определения функции:

а) $p = \sqrt{9 - z^2}$; г) $p = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 7}}$; ж) $p = \frac{1}{\sqrt{3 - d - 1}}$;

б) $p = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$; д) $p = \sqrt{2 - \sqrt{d}}$; з) $p = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d}}}$.

в) $p = \sqrt{z^2 - 0,25}$; е) $p = \sqrt{\frac{1}{d} + 1}$;

249. Найдите область значений функции:

а) $y = 2x^2 - 4x + 3$; в) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = (x^2 - 6x + 10)^{-1}$; г) $y = \frac{3x - 2}{x + |2x - 1|}$.

250. Докажите, что областью значений функции $y = \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + x + 1}$ является промежуток $\left(1; \frac{23}{3}\right]$.

251. Докажите, что функция $y = x^2 - 6x + 3$ при $x > 3$ возрастает и при $x < 3$ убывает.

252. Докажите, что функция $y = \frac{x}{x^2 + 1}$:

а) на промежутке $[-1; 1]$ возрастает;

б) на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ убывает.

253. Найдите промежутки, на которых сохраняет свой знак функция:

а) $y = -2x^2 - 6x + 10$; б) $y = \frac{x^2 - 7x - 2}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x - 8}{x + 2}$.

254. На отрезке AB точка M выбрана так, что $MB = 40$ см. На полученных отрезках-частях MA и MB как на основаниях построены такие треугольники MAP и MBR , что площадь первого равна 645 см^2 , а его высота на 21 см больше. Найдите высоты этих треугольников, учитывая, что когда на отрезке AB построили треугольник ABT с площадью, равной суммарной площади треугольников MAP и MBR , то его высота оказалась равной 31 см.

* * *

255. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABFD$ и $ACGL$. Найдите отрезок DL , учитывая, что медиана AM равна a .

256. Учитывая, что неравенство $x^2 + px + q > 0$, где p и q — целые числа, истинно при всех целых значениях переменной x , докажите, что истинно и неравенство $p^2 < 4q$.

257. Можно ли, пользуясь только действиями сложения, вычитания и умножения, из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить выражение x , учитывая, что:

- а) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$; в) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$;
б) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$;

6. Исследование функции с помощью производной

Мы уже умеем читать график функции, т. е. устанавливать свойства функции по её графику. Теперь ставится обратная задача — научиться строить график функции, определив нужные для этого её свойства. Это становится возможным, если использовать производную.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке промежутка $[a; b]$, то найдётся такая

точка c , $a < c < b$, что $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

К этой теореме можно прийти, используя геометрический смысл касательной к графику функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $[a; b]$. Через точки $M(a, f(a))$ и $N(b, f(b))$ её графика проведём прямую (рис.172). Пусть l — какая-либо прямая, параллельная прямой MN , не имеющая общих точек с графиком функции $f(x)$. Эту прямую будем перемещать параллельно самой себе по направлению к графику функции до того момента

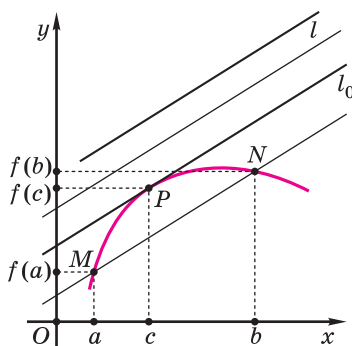


Рис. 172

та, пока она не коснётся графика в некоторой его точке P . Пусть l_0 — положение прямой l в этот момент и c — абсцисса точки P . Тогда

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, образованный прямой l_0 с положительным направлением оси абсцисс. Но касательная l параллельна секущей MN , значит, угол α равен углу наклона секущей MN , т. е.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Установленная теорема называется *теоремой Лагранжа*.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик (рис. 173). Он самостоятельно изучал математику, сделал значительные открытия в механике, математическом анализе, математической картографии, астрономии и др.



Рис. 173.
Жозеф Лагранж

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную и если эта производная положительна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает, а если эта производная отрицательна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ убывает.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную $f'(x)$. Выберем два каких-либо числа x_1 и x_2 из промежутка $(a; b)$, причём $x_1 < x_2$. В соответствии с теоремой Лагранжа найдётся такое число c , $x_1 < c < x_2$, что

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Отметим, что число c принадлежит промежутку $(x_1; x_2)$, а значит, и промежутку $(a; b)$.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; b)$, то $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, а это означает, что на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ убывает.

Теорема 5 даёт признаки возрастания и убывания функции.

Рисунок 174 показывает, что если производная $f'(x_0)$ функции в точке x_0 положительна, то касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс, и в определённой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ возрастает. А если производная $f'(x_0)$ функции в точке x_0 отрицательна, то касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс, и, как видно из рисунка 175, в определённой окрестности этой точки функция $f(x)$ убывает.

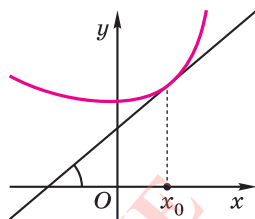


Рис. 174

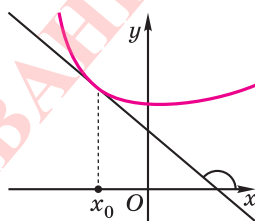


Рис. 175

Пример 1. Найдём промежутки возрастания и убывания функции $y = 3x^2 - x^3$ и построим её график.

Функция $y = 3x^2 - x^3$ определена на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Найдём её производную:

$$y'(x) = 6x - 3x^2.$$

Найдём промежутки, на которых производная положительна, на которых — отрицательна:

$$6x - 3x^2 > 0 \equiv x(2 - x) > 0 \equiv 0 < x < 2;$$

$$6x - 3x^2 < 0 \equiv x(2 - x) < 0 \equiv x < 0 \text{ или } x > 2.$$

Значит, на промежутке $(0; 2)$ функция $y = 3x^2 - x^3$ возрастает, а на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ убывает.

Найдём значения функции при значениях аргумента 0 и 2:

$$y(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0;$$

$$y(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 4.$$

Найдём нули функции:

$$\begin{aligned} 3x^2 - x^3 = 0 &\equiv x^2(3 - x) = 0 \equiv \\ &\equiv x = 0 \text{ или } x = 3. \end{aligned}$$

Отметим на координатной плоскости точки $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(3; 0)$ и нарисуем график функции, учитывая, что на промежутках $(-\infty; 0)$ функция убывает, на промежутке $(0; 2)$ — возрастает, на промежутке $(2; +\infty)$ — снова убывает (рис. 176).

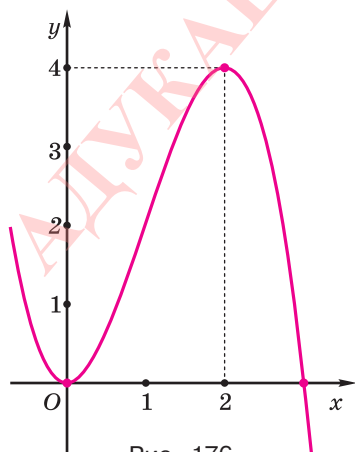


Рис. 176

Рассмотренный пример показывает, что при исследовании функции важно найти точки, в которых возрастание функции сменяется её убыванием и наоборот.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (рис. 177 и 178).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 истинно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ (рис. 179 и 180).

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*, в точке минимума — *минимумом функции*.

Точки максимума и минимума вместе называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами функции*.

Свой экстремум функция может иметь в таких внутренних точках её области определения, в которых производная равна нулю или не существует (рис. 181 и 182). Эти точки называются *критическими точками*.

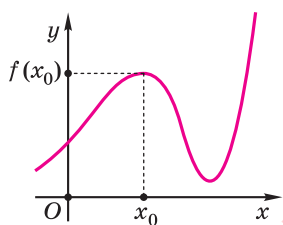


Рис. 177

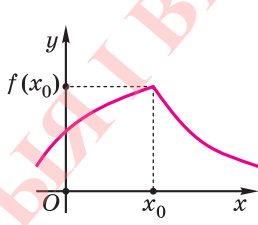


Рис. 178

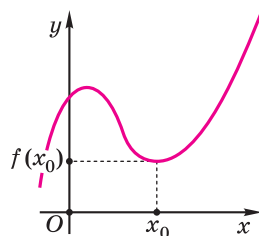


Рис. 179

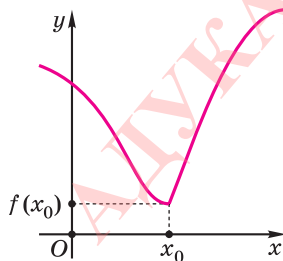


Рис. 180

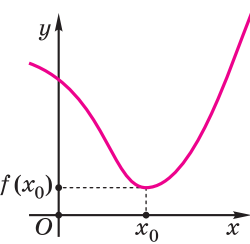


Рис. 181

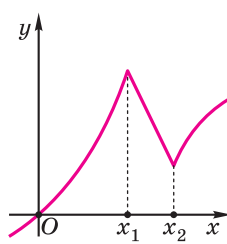


Рис. 182

Теорема 6. Если точка x_0 является точкой экстремума функции и в этой точке существует производная, то она равна нулю.

К этой теореме можно прийти, используя механический смысл производной. Будем рассматривать данную функцию $y = f(x)$ как закон движения материальной точки A по оси ординат y в зависимости от времени x . Пусть в момент x_0 функция достигает своего экстремума, т. е. в момент x_0 точка A занимает на оси y самое высокое (самое низкое) положение. Путь y в момент x_0 перестаёт возрастать (убывать), поэтому его скорость становится равной нулю, т. е. $f'(x) = 0$.

Теорема 6 называется *теоремой Ферма*.

Пьер Ферма (1601—1665) (рис. 183) — французский математик, юрист по профессии, один из создателей теории чисел, развивал метод координат, работал также в области математического анализа.



Рис. 183.
Пьер Ферма

Утверждение, обратное теореме Ферма, ложно. Например, производная функции $y = x^3$ в точке 0 обращается в нуль, но в этой точке функция не имеет экстремума (рис. 184).

Свой экстремум функция может иметь в точке, в которой она не имеет производной. Например, функция $y = |x|$ в точке 0 имеет минимум, но производной в этой точке не имеет (рис. 185).

Функция в некоторой точке может не иметь производной, и эта точка может не быть точкой экстремума. Например, как видно из графика функции $y = |x| + 2x$, изображённого на рисунке 186, эта функция в точке 0 не имеет производной и вместе с тем не имеет и экстремума.

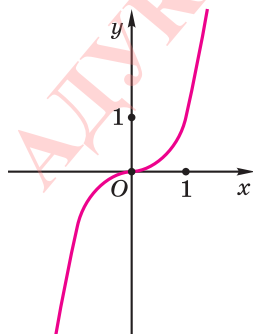


Рис. 184

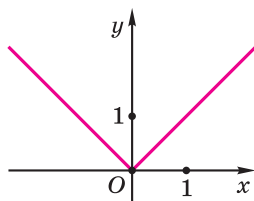


Рис. 185

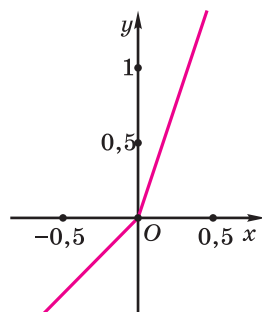


Рис. 186

Таким образом, критическая точка — это точка возможного экстремума, но вопрос о том, действительно ли данная критическая точка является точкой экстремума, требует дополнительного исследования.

Теорема 7. *Если при переходе через критическую точку производная функции меняет свой знак с плюса на минус, то эта критическая точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс — то точкой минимума.*

Доказательство. Пусть точка x_0 — критическая точка дифференцируемой функции $y = f(x)$.

Пусть $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; x_0)$, а $f'(x) < 0$ на промежутке $(x_0; b)$. Тогда в соответствии с теоремой 5 функция $f(x)$ на $(a; x_0)$ возрастает, а на $(x_0; b)$ убывает. Поэтому для всех x из промежутка $(a; b)$ истинно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, т. е. точка x_0 является точкой максимума.

Пусть $f'(x) < 0$ на промежутке $(a; x_0)$, а $f'(x) > 0$ на промежутке $(x_0; b)$. Тогда в соответствии с теоремой 5 функция $f(x)$ на $(a; x_0)$ убывает, а на $(x_0; b)$ возрастает. Поэтому для всех x из промежутка $(a; b)$ истинно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, т. е. точка x_0 является точкой минимума.

Теорема 7 даёт признаки максимума и минимума функции.

Пример 2. Найдём экстремумы функции $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$.

Производная функции равна $x^3 - 3x^2 - 4x$. Она определена во всех точках области определения функции и превращается в нуль в точках $-1, 0, 4$.

Поскольку $x^3 - 3x^2 - 4x < 0$ при $x < -1$ и $x^3 - 3x^2 - 4x > 0$ при $-1 < x < 0$, то в точке -1 функция имеет минимум. Найдём его: $\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{3}{4}$.

Поскольку при переходе через точку 0 производная $x^3 - 3x^2 - 4x$ меняет свой знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума, который равен $\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0^2$, т. е. равен 0 . Так же устанавливаем, что точка 4 является точкой минимума, который равен $\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 4^3 - 2 \cdot 4^2$, т. е. равен -32 .

Результаты исследования удобно свести в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$ min	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	-32 min	$\nearrow$

График функции изображён на рисунке 187.



1. Сформулируйте теорему Лагранжа.
2. Сформулируйте признак возрастания функции; признак убывания функции.
3. Какая точка области определения функции называется точкой максимума; точкой минимума; точкой экстремума?
4. Какое число называется максимумом функции; минимумом функции; экстремумом функции?
5. Какие точки области определения функции называются критическими точками?
6. Сформулируйте признак максимума функции; признак минимума функции.

258. Дайте определение возрастающей на промежутке функции и, используя его, докажите, что функция $y = x^2 - 4x + 1$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$. Постройте график этой функции и определите знак производной $f'(x)$ в указанных промежутках возрастания и убывания.

259. Докажите, что функция $y = x^3 + 4x$ возрастает на всей координатной прямой с помощью:

- а) неравенств; б) производной.

260. По графику функции G на рисунке 188 определите:

- а) промежутки, на которых производная G' положительна;

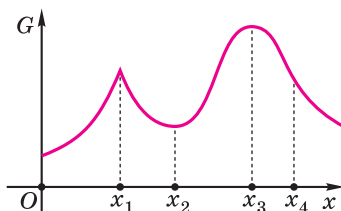


Рис. 188

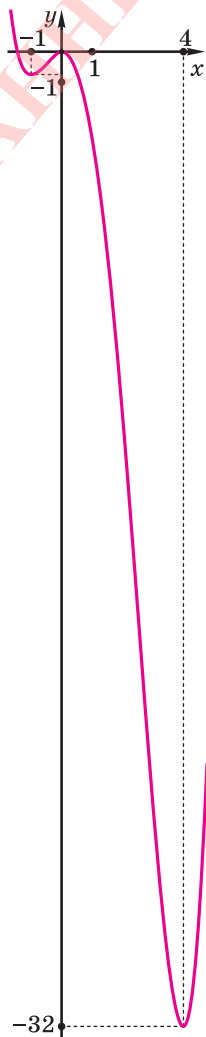


Рис. 187

- б) промежутки, на которых производная G' отрицательна;
 в) точки, в которых производная равна нулю;
 г) точки, в которых производная не существует.

261. Найдите промежутки, в которых положительно производная функции:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

262. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $p(y) = 3y + 1$; г) $q(y) = -\frac{1}{4}y - 2$; ж) $p(h) = \frac{2}{3-h}$;
 б) $p(y) = \frac{1}{3}y - 1$; д) $p(h) = \frac{2}{h}$; з) $q(h) = 2 - \frac{4}{0,5h-1}$.
 в) $q(y) = -4y + 2$; е) $q(h) = -\frac{1}{3h}$;

263. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $k = x^2$; д) $f = x^3 - 27x$;
 б) $p = (x - 1)^2$; е) $n = x^2(x - 3)$;
 в) $t = 5x^2 - 3x + 1$; ж) $g = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;
 г) $h = x^2 - 2x + 5$; з) $d = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$.

264. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = -2x^2 + 3x + 5$; ж) $y = -x^3 + 3x + 2$;
 б) $y = (x + 1)^2$; з) $y = x^3 + 3x + 1$;
 в) $y = 2x^2 - x$; и) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$;
 г) $y = 6 - x - x^2$; к) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
 д) $y = x^3 + x$; л) $y = x^4 - 4x^3 + 10$;
 е) $y = x^3 - 12x + 1$; м) $y = x^4 - 2x^2 + 24x + 1$.

265. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$; ж) $y = \frac{x}{x^2+1}$;
 б) $y = 3x^5 - 5x^3 - 30x$; з) $y = \frac{x-2,5}{x^2-4}$;
 в) $y = x + \frac{1}{x}$; и) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;
 г) $y = x - \frac{1}{x}$; к) $y = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$;
 д) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; л) $y = x - \sqrt{x}$;
 е) $y = \frac{x}{x^2-1}$; м) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

266. По графику функции f на рисунке 189 определите:

а) промежутки, на которых производная f' положительна, и промежутки, на которых она отрицательна;

б) точки, где производная равна нулю;

в) точки, где производная не существует.

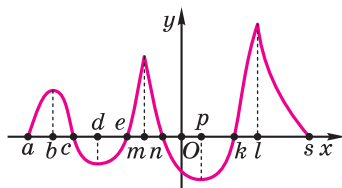


Рис. 189

267. По графику производной функции f на рисунке 190, определите:

а) промежутки возрастания и убывания функции f ;

б) точки максимума и минимума функции f ;

в) точки, в которых производная функции f не существует.

268. Высота, на которой в момент времени t находится тело, брошенное вертикально вверх, равна $h(t)$. Определите, чему равна производная $h'(t)$ в момент, когда тело достигло наибольшей высоты.

269. На рисунке 191 изображён график функции $y(x)$. Укажите:

а) точки максимума и минимума функции $y(x)$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на промежутке $[a; b]$.

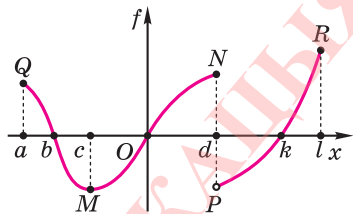


Рис. 190

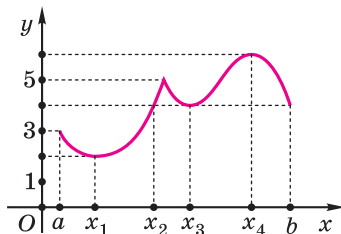


Рис. 191

270. Нарисуйте график такой функции f , у которой на промежутке $[a; b]$ какой-либо минимум больше одного из её максимумов.

271. По графику функции $y(x)$ на рисунке 192 укажите точки, в которых производная функции h :

а) равна нулю;

б) не существует.

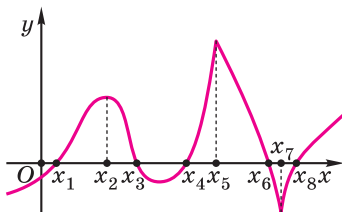


Рис. 192

272. Найдите точку, в которой производная функции $y = x^5$ превращается в нуль. Имеет ли функция в этой точке экстремум?

273. Найдите точки, в которых функция f может иметь экстремум, учитывая, что:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$;

г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$;

б) $f(x) = 10 + 2x - x^2$;

д) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$;

е) $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

274. Сколько точек экстремума может иметь:

а) квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$;

б) кубическая функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a \neq 0$.

275. Исследуйте на экстремум функцию:

а) $y = 3 - x^2$;

д) $y = 12x - x^3$;

б) $y = 1 - x - x^2$;

е) $y = x^3 - 6x^2$;

в) $y = 1 - x - x^2$;

ж) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 5$;

г) $y = 2x^2 - x + 5$;

з) $y = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1$.

276. Найдите точку экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, и значение этой функции в точке экстремума. Установите, при каком знаке коэффициента a эта точка является точкой максимума, а при каком — точкой минимума функции.

277. С помощью производной найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 8x + 1$;

б) $y = 2x^2 - 8x - 1$.

278. Определите, имеет ли экстремум функция:

а) $y = \frac{1}{x^2}$;

в) $y = (x - 2)^2$;

б) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

г) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

279. Верно ли, что функция y не имеет точек экстремума, если:

а) $y = \sqrt[5]{x^2}$;

б) $y = \sqrt[5]{x^3}$?

280. Найдите критические точки функции f и установите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума, учитывая, что:

а) $f(t) = 2t - 7$;

в) $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t$;

б) $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t$;

г) $f(t) = 4 - 2t + 7t^2$;

$$д) f(t) = \frac{t}{3} + \frac{3}{t};$$

$$ж) f(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^4;$$

$$е) f(t) = \frac{t}{8} + \frac{2}{t};$$

$$з) f(t) = 2t^3 + 6t^2 - 18t + 120.$$

281. Найдите критические точки функции g и установите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума, учитывая, что:

$$а) g(z) = \sqrt{z};$$

$$в) g(z) = \sqrt{z^2 + 2z};$$

$$б) g(a) = \sqrt{a^2 + 1};$$

$$г) g(a) = \begin{cases} -2a & \text{при } a \leq -2, \\ a^2 & \text{при } -2 < a < 2, \\ 6 - a & \text{при } a \geq 2. \end{cases}$$

282. Найдите промежутки возрастания, промежутки убывания и экстремумы функции:

$$а) p(x) = 4x^2 - 6x;$$

$$д) n(h) = \frac{3h-1}{1-4h};$$

$$б) q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;$$

$$е) t(h) = \frac{h-3}{2h+4};$$

$$в) p(x) = x^3 + 3x^2;$$

$$ж) n(h) = \frac{(h-2)(8-h)}{h^2};$$

$$г) q(x) = 1 + x - x^3;$$

$$з) t(h) = \frac{16}{h(4-h^2)}.$$

283. Найдите промежутки возрастания, промежутки убывания и экстремумы функции:

$$а) p(t) = 6t^5 + 15t^4 + 10t^3;$$

$$в) p(t) = \frac{t^2}{t^2+3};$$

$$б) q(t) = t^4(t-12)^2;$$

$$г) q(t) = \frac{t^2-2t+2}{t-1}.$$

284. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума функции:

$$а) y = 4 + x - 3x^3;$$

$$в) y = \frac{4}{(x-2)^2};$$

$$д) y = \frac{x-1}{2x+1};$$

$$б) y = 3x^3 - x + 3;$$

$$г) y = -\frac{3}{(3-x)^2};$$

$$е) y = \frac{2-x}{3x-1}.$$

285. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

$$а) y = x + \frac{1}{x};$$

$$б) y = \frac{x}{4} + \frac{16}{x};$$

$$в) y = \frac{x-1}{2} + \frac{8}{x-1} - 1;$$

$$\text{г) } y = \frac{1+x}{1+4x^2}; \quad \text{д) } y = \frac{x^2}{x^2-4}; \quad \text{е) } y = 2x - \sqrt{x}.$$

286. Производная квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ в точках 3 и 8 равна соответственно 10 и 5. Найдите точку экстремума функции y и определите, является она точкой максимума или минимума.

287. Функция $y = (x - a)(x^2 - 1)$ имеет минимум в точке $x = \frac{1}{9}$. Определите, в какой точке у неё максимум.

288. Определите, при каких значениях параметра a функции $y = -x^3 + 3ax + 5$ и $y = x^2 + (a + 1)x$ имеют минимум в одной точке.

289. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и нарисуйте эскиз графика функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = 2x^3 + 3x^2 - 1; & \text{в) } y = 0,5x^4 - 4x^2; \\ \text{б) } y = x^3 + 3x - 2; & \text{г) } y = x^4 - 8x^2 + 9. \end{array}$$

290. Докажите, что функция $y = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}$ возрастает на всей числовой прямой. Используя это, докажите, что при $x \geq 0$ истинно неравенство $\frac{x^5}{5} + x \geq \frac{2}{3}x^3$.

291. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x+3}{x(x-1)} > 1; & \text{в) } \sqrt{3x-1} < 5; \\ \text{б) } \frac{x^2+3}{x-1} < 2; & \text{г) } \sqrt{5-2x} > 2. \end{array}$$

292. Определите, при каких значениях переменной a не имеет решений система:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 7x - 2ay = 5, \\ (4 - 3a)x + 4ay = 7; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} (a+1)x + 4y = 2a + 4, \\ 2x + (a-1)y = 3a^2 - 22. \end{cases} \end{array}$$

293. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между диагоналями прямоугольника, у которого одно измерение втрое больше другого.

294. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом в 15° квадрат гипотенузы равен учетверённому произведению катетов.

295. Два тела с суммарной массой 36 кг движутся по одной прямой равноускоренно, первое под воздействием силы в 42 Н, второе с ускорением 5 м/с. Найдите массы

тел в отдельности, учитывая, что третье тело массой 19 кг, на которое действует сила, равная сумме сил, действующих на первое и второе тела, движется с ускорением, равным сумме ускорений первого и второго тел.

296. Два тела движутся по одной прямой равноускоренно так, что их ускорения вместе составляют 24 м/с^2 . На первое тело действует сила, равная 42 Н, а масса второго тела равна 49 кг. Найдите ускорения каждого тела, учитывая, что третье тело, масса которого равна суммарной массе первого и второго тел, под воздействием силы, равной сумме сил, действующих на первое и второе тела, движется с ускорением 17 м/с^2 .

* * *

297. Из чисел от 1 до 50 образовали 10 групп по пять чисел в каждой группе. Определите, какой может быть наибольшая и какой наименьшая сумма средних по величине чисел из этих 10 групп.

298. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры BM и CN на прямые, которые делят пополам углы C и B . Найдите отрезок MN , учитывая, что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

299. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$. Можно ли поставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы образовавшееся выражение имело значение 0? Сколько чисел нужно зачеркнуть, чтобы из остальных при определённой расстановке знаков «+» и «-» можно было образовать выражение со значением 0?

7. Применения производной

В предыдущем параграфе мы рассмотрели одно из важнейших применений производной к исследованию функций. Рассмотрим задачу об определении наибольшего и наименьшего значений функции на определённом промежутке.

Пусть непрерывная функция f рассматривается на промежутке $[a; b]$ и на нём не имеет критических точек. Тогда на этом промежутке функция или возрастает, или убывает. Значит, свои наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[a; b]$ функция принимает в концах a и b .

Пусть теперь непрерывная функция f рассматривается на промежутке $[a; b]$, на котором она имеет несколько критических точек. Эти точки разделяют промежуток $[a; b]$ на такие промежутки, внутри которых критических точек уже нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения эта функция на том или ином таком промежутке принимает в его концах, т. е. в критических точках или в точках a и b . Значит, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке $[a; b]$, достаточно найти её значения в критических точках и на концах a и b , а затем из этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 53$ на промежутке $[-3; 2]$.

Найдём критические точки:

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 6x - 36 = 0; \\ x &= -2 \text{ или } x = 3. \end{aligned}$$

Поскольку промежутку $[-3; 2]$ принадлежит только критическая точка -2 , то найдём значения функции в этой точке и на концах -3 и 2 :

$$\begin{aligned} y(-3) &= 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 53 = 80; \\ y(-2) &= 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-2) + 53 = 97; \\ y(2) &= 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 53 = -15. \end{aligned}$$

Из полученных чисел 80 , 97 , -15 выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\begin{aligned} y_{\text{наиб.}} &= 97; & y_{\text{наим.}} &= -15. \\ [-3; 2] & & [-3; 2] & \end{aligned}$$

В жизни часто встаёт задача отыскания наилучшего, или оптимального, решения. В тех случаях, когда задачу удаётся сформулировать на языке математики, она сводится к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Пример 2. Из прямоугольного листа жести, вырезав квадратные уголки, можно сделать открытые коробки различной вместимости (рис. 193). Найдём сторону вырезанного уголка, при которой из листа размерами 10×16 получится коробка наибольшей вместимости.

Пусть a — сторона вырезанного уголка. Тогда каждая сторона прямоугольника уменьшится на $2a$. Значит, изме-

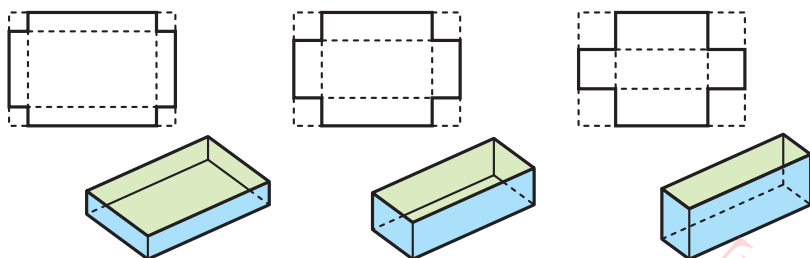


Рис. 193

рения коробки равны a , $10-2a$, $16-2a$, и для вместимости V коробки получаем:

$$V = a(10 - 2a)(16 - 2a), \text{ или } V = 4a^3 - 52a^2 + 160a.$$

Легко усмотреть, что переменная a принимает значения из промежутка $[0; 5]$ и на концах этого промежутка переменная V своим значением имеет число 0.

Находим критические точки функции V :

$$V' = 12a^2 - 104a + 160 = 0;$$

$$a = 2 \text{ или } a = 6\frac{2}{3}.$$

Значение переменной a , равное $6\frac{2}{3}$, не принадлежит области определения. При $a = 2$ функция V имеет наибольшее значение, найдём его:

$$V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144.$$

Следующая теорема даёт решение задачи о касательной к графику функции.

Теорема 8. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0; f(x_0))$ задаётся уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Пусть есть график функции $y = f(x)$, на котором выбрана определённая точка $A(x_0; f(x_0))$ (рис. 194). Найдём уравнение касательной к этому графику в точке A .

Как было установлено в параграфе 4, угловой коэффици-

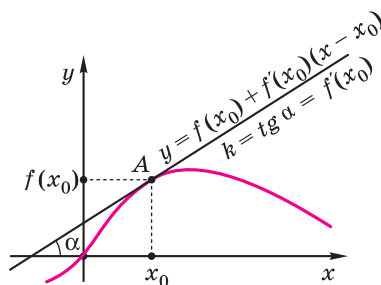


Рис. 194

ент a касательной $y = ax + b$ в точке $A(x_0; f(x_0))$ к графику функции $y = f(x)$ равен значению производной в этой точке, т. е. равен $f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной выглядит так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Поскольку касательная проходит через точку A , то её координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Поэтому

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

и значит,

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

или

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

В результате получаем уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 3. Докажем, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке M с абсциссой x_0 , $x_0 \neq 0$ пересекает ось абсцисс в точке $A\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ (рис. 195).

Поскольку $y(x_0) = x_0^2$ и $y'(x_0) = 2x_0$, то уравнение касательной запишется так:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \text{ или } y = 2x_0x - x_0^2.$$

Точка A , в которой касательная пересекает ось абсцисс, имеет ординату, равную нулю, т. е. истинно равенство $0 = 2x_0x - x_0^2$.

Отсюда $x = \frac{x_0}{2}$.

Установленный факт обосновывает такой способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке M с абсциссой x_0 : найти

середину A отрезка оси абсцисс с концами O и x_0 ; провести прямую MA , которая и является искомой касательной.

Производную можно использовать для *приближенных вычислений*. Пусть нужно найти приближенное значение функции $y = f(x)$ в точке x , причём в точке x_0 , близкой к

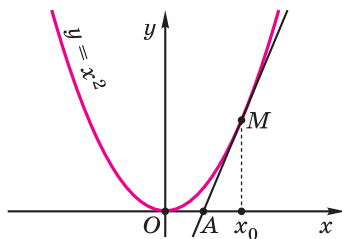


Рис. 195

точке x , значение функции находится просто (рис. 196). График функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 близок к прямой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — касательной к графику в точке x_0 . Поэтому верно приближенное равенство $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Если разность $x - x_0$ обозначить Δx , то тогда $x = x_0 + \Delta x$ и полученное приближенное равенство можно записать в виде:

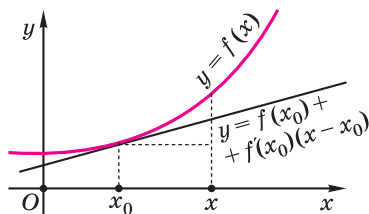


Рис. 196

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (1)$$

Пример 4. Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$. Выбрав определенное значение x_0 переменной x и применив формулу (1), получаем

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + x_0^{n-1} \Delta x.$$

Найдём $2,997^5$. Здесь $x = 2,997$ и $n = 5$. В качестве x_0 удобно взять 32. Тогда $2,997^5 = (3 - 0,003)^5 \approx 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot (-0,003) = 241,785$. Вычисления с помощью микрокалькулятора дают значение 241,7874, т. е. относительная погрешность составляет $\left| \frac{241,7874 - 241,785}{241,785} \right| \cdot 100 \%$, т. е. 0,00099 %.

Найдём $\sqrt[5]{30}$. Здесь в качестве x_0 удобно взять 30. Тогда $\sqrt[5]{30} = 30^{\frac{1}{5}} = (32 - 2)^{\frac{1}{5}} \approx 32^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} \cdot 32^{\frac{1}{5}-1} \cdot (-2) = 2 - \frac{2}{5} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} = 2 - \frac{2}{5} \cdot \left(32^{\frac{1}{5}} \right)^{-4} = 2 - \frac{2}{5} \cdot (2)^{-4} = 2 - \frac{1}{40} = 1,975$.

Вычисления с помощью микрокалькулятора дают значение 1,97435, т. е. относительная погрешность составляет $\left| \frac{1,97435 - 1,975}{1,975} \right| \cdot 100 \%$, т. е. 0,033 %.



1. Сформулируйте признак возрастания функции; признак убывания функции.
2. Сформулируйте признак максимума функции; признак минимума функции.

3. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на данном промежутке.
4. Запишите уравнение касательной к графику функции в данной точке.
5. Как можно построить касательную к параболе $y = x^2$ в точке с данной абсциссой?
6. Запишите равенство, которое позволяет находить приближенное значение функции в данной точке.

300. Нарисуйте график функции $f(x) = -x^2 + 4x$. Найдите её наибольшее значение на промежутке:

- а) $[0; 1]$; б) $[1; 2]$; в) $[1; 3]$.

301. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке $[a; b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3, a = 0, b = 1$;

б) $f(x) = x^2 + 4x - 2, a = -3, b = 1$;

в) $f(x) = x^3 + 3x, a = 0, b = 2$;

г) $f(x) = x^3 - 3x, a = -1, b = 3$;

д) $f(x) = \frac{4}{x} + x - 3, a = 1, b = 4$;

е) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x, a = 0, b = 4$.

302. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке $[a; b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ и $[a; b] = [-4; 4]$;

б) $f(x) = (3x^2 - 6x + 4)^2$ и $[a; b] = [0; 3]$;

в) $f(x) = (x^4 - 1)^3$ и $[a; b] = [-1; 2]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ и $[a; b] = [0; 2]$.

303. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке A , учитывая, что:

а) $f(x) = 1,5x^2 + \frac{81}{x}, A = [1; 4]$;

б) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}, A = [-5; -2,5]$.

304. Есть функция f . Сравните её наибольшее значение на промежутке A с наименьшим значением на промежутке B , учитывая, что:

а) $f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t, A = [-4; 0], B = [3; 4]$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4, A = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], B = [2; 3]$.

305. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $f(t) = t^4 - 8t^2 - 9$ на промежутке $[-1; 1]$ и на промежутке $[0; 3]$;

б) $g(x) = 3x^5 - 5x^3 - 9$ на промежутке $[0; 2]$ и на промежутке $[2; 3]$;

в) $u(a) = \frac{a^2 + 4}{a}$ на промежутке $[-4; -1]$ и на промежутке $[1; 3]$;

г) $v(c) = \frac{c^2 + 4}{c}$ на промежутке $[-3; -2]$ и на промежутке $[1; 5]$.

306. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, $[a; b] = [-1; 1]$;

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[a; b] = [-1; 2]$;

в) $f(x) = 7 + 4x^3 - x^4$, $[a; b] = [-1; 3]$;

г) $f(x) = 5x - \frac{5}{3}x^3$, $[a; b] = [0; 2]$;

д) $f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 2}{x^2 - 5x - 6}$, $[a; b] = [0; 2]$;

е) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[a; b] = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$;

ж) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[a; b] = [0; 4]$;

з) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[a; b] = [0; 9]$;

и) $f(x) = 7x^3 + 9x^2 - 3x + 6$, $[a; b] = [-1; 1]$;

к) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 13$, $[a; b] = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

307. Докажите, что если $|x| \leq 2$, то $|x^3 - 3x| \leq 2$.

308. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на промежутке A и на промежутке B , учитывая, что:

а) $f(x) = x^3 - 27x + 2$, $A = [-1; 1]$, $B = [4; 6]$;

б) $f(x) = x^4 - 4x - 9$, $A = [-2; 0]$, $B = [2; 3]$;

в) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 8$, $A = [-2; -1]$, $B = [1; 2]$;

г) $f(x) = -1 + 3x^2 - x^3$, $A = [-2; 0]$, $B = [2; 3]$.

309. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $4x^3 - 3x = a$ имеет только один корень.

310. Найдите количество корней уравнения:

а) $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$; в) $12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5 = 0$;

б) $5x^3 - 5x - 3 = 0$; г) $x^4 + x^3 = 10$.

311. Найдите такое положительное число, что:

- а) сумма его и обратного ему числа наименьшая;
- б) сумма его и квадрата обратного ему числа наименьшая;
- в) разность его и его куба наибольшая.

312. Представьте число:

- а) 16 суммой двух таких неотрицательных чисел, чтобы их произведение было наибольшим;
- б) 36 произведением двух таких неотрицательных чисел, чтобы их сумма была наименьшей.

313. Докажите, что:

- а) произведение двух положительных чисел, сумма которых равна s , имеет наибольшее значение, если множители равны друг другу.
- б) сумма двух положительных чисел, произведение которых равно p , имеет наименьшее значение, если слагаемые равны друг другу.

314. Площадь прямоугольника равна 64 см^2 . Определите, какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьший.

315. Представьте число:

- а) 10 суммой двух таких положительных чисел, чтобы сумма их квадратов была наименьшей;
- б) 8 суммой двух таких положительных чисел, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

316. Из всех прямоугольников с периметром 20 см найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

317. Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Определите, какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.

318. Представьте число:

- а) 8 суммой двух таких положительных чисел, что сумма куба одного слагаемого и квадрата второго наименьшая из возможных;
- б) 54 суммой трёх таких положительных чисел, что два из них пропорциональны числам 1 и 2, а произведение всех слагаемых наибольшее из возможных.

319. Есть 200 м проволочной сетки. Определите размеры ограждённого этой сеткой прямоугольного загона наибольшей площади, ограниченного с одной стороны рекой.

320. Нужно выгородить прямоугольное пастбище площадью 1 км^2 и разделить его на два прямоугольных участка. Определите наименьшее значение длины ограждения такого пастбища.

321. На двух строительных площадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 м^2 . Учитывая, что стоимость строительства склада прямо пропорциональна квадрату его площади и строительство 1 м^2 на второй площадке стоит на 40% дороже, чем на первой, определите, какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей.

322. Точка M — середина отрезка AB . Найдите точку X на этом отрезке, для которой произведение длин отрезков AX , MX и XB наибольшее.

323. Определите стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в треугольник с основанием a и высотой h .

324. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, найдите прямоугольник наибольшей площади.

325. Стороны AB , BC и CD трапеции $ABCD$ равны 1 каждая и сторона AD больше стороны BC . Определите, каким должен быть угол CDA , чтобы площадь трапеции была наибольшей.

326. Из прямоугольного листа жести размерами $a \times b$, вырезав квадратные уголки, нужно сделать открытую коробку. Определите, какой должна быть сторона вырезанного квадрата, чтобы объём коробки был наибольшим.

327. Нужно сделать коробку без крышки с прямоугольным основанием и объёмом V , отношение сторон основания которой было бы равно k . Определите, какими должны быть размеры коробки, чтобы её поверхность была наименьшей, учитывая, что:

- а) $k = 1$, $V = 32$; б) $k = 2$, $V = 36$.

328. Объём V прямой четырёхугольной призмы с квадратным основанием равен 8 см^3 . Определите, какими должны быть сторона a основания и высота h призмы, чтобы площадь её поверхности была наименьшей, учитывая, что объём V призмы и её боковая поверхность S опреде-

ляются по формулам $V = S_{\text{осн.}} h$ и $S = Ph$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, P — периметр основания (рис. 197).

329. Поверхность коробки без верхней крышки в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 300 см^2 . Определите размеры коробки, учитывая, что её объём наибольший из возможных.

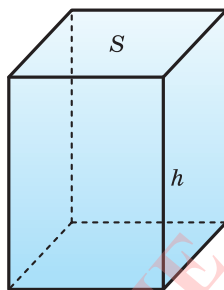


Рис. 197

330. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Определите, какими должны быть размеры такого бака, чтобы его поверхность без крышки была наименьшей, учитывая, что боковая поверхность цилиндра $S_{\text{бок.}}$ и его объём V определяются формулами $S_{\text{бок.}} = 2\pi r h$ и $V = \pi r^2 h$, где r — радиус основания цилиндра, а h — его высота (рис. 198).

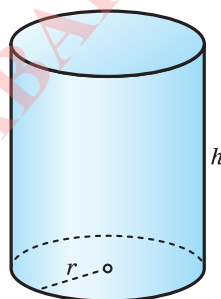


Рис. 198

331. Определите, какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр, объём которого равен V (см. рис. 198).

332. Найдите, какую наименьшую поверхность может иметь тело с объёмом Q , представляющее собой прямой круговой цилиндр, завершённый полушаром (рис. 199), учитывая, что объём V и боковая поверхность $S_{\text{бок.}}$ цилиндра определяются формулами $V = S_{\text{осн.}} h$ и $S_{\text{бок.}} = Ch$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания цилиндра, C — длина окружности этого основания, а объём V и поверхность S шара — формулами $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.

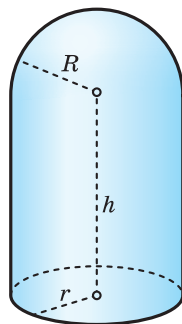


Рис. 199

333. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки хочет попасть в точку B , которая находится на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может за час пройти 5 км. К какой точке

берега должна пристать лодка, чтобы пассажир попал в $\sqrt{B}$ за кратчайшее время?

334. Укажите точки, в которых нельзя провести касательную к графику функции:

- а) $y = |x - 3|$; в) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
б) $y = |x - 1| + |x + 2|$; г) $y = |x^2 - x|$.

335. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке A , учитывая, что:

- а) $f(x) = x^2$, $A(-4; 16)$; в) $f(x) = x^3$, $A(-2; -8)$;
б) $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$, $A(0; 0)$; г) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $A(1; -2)$.

336. Определите, в какой точке кривой $y = -\frac{1}{2}x^2$ касательная наклонена к оси x под углом:

- а) 45° ; б) 135° .

337. Определите, в какой точке графика функции $g = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом:

- а) 45° ; б) 60° .

338. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке:

- а) $x = 1$; б) $x = -1$; в) $x = \frac{1}{2}$; г) $x = -\frac{1}{4}$.

339. Напишите уравнение касательной к параболе $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения её с осью ординат.

340. Найдите уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x+1}$ в точке $x = 0$ и нарисуйте эти гиперболу и касательную.

341. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ в точке с абсциссой:

- а) $x = 0$; б) $x = 1$.

342. На параболе $y = x^2 - 4x$ найдите точку, в которой касательная к параболе параллельна оси абсцисс.

343. Определите, в какой точке касательная к кубической параболе $y = x^3$ параллельна прямой $y = 3x - 5$.

344. Определите, в каких точках графика функции $y = \frac{x}{x^2+1}$ касательная:

- а) параллельна оси абсцисс;
б) составляет с осью абсцисс угол 45° ;

в) параллельна прямой $y = \frac{2}{9}x + 1$;

г) перпендикулярна прямой $y = 8x + 3$.

345. Постройте в тетради параболы $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4$ и касательные к ним в точках пересечения. Найдите уравнения этих касательных. Определите угол между касательными.

346. Найдите точку пересечения линий $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ и запишите уравнения касательных к этим линиям, проведённых через точку пересечения. Определите угол между этими касательными.

347. Найдите:

а) координаты точки параболы $y = x^2 - x$, в которой касательная проходит через точку $M(2; 0,25)$;

б) касательную к кривой $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$, которая проходит через точку $N(-2; 3)$.

348. К гиперболе $y = \frac{1}{x}$ проведена произвольная касательная. Докажите, что площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат, равна 2.

349. Вычислите приближенно:

а) $\sqrt[3]{1,012}$; б) $\sqrt[5]{30}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[5]{9,02}$.

350. Найдите приближенное значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ при:

а) $x = 2,0057$; б) $x = 1,974$.

351. Найдите приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0 , учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^5$, $x_0 = 1,003$; в) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1,97$;

б) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = 2,04$; г) $f(x) = 5\sqrt{x}$, $x_0 = 4,02$.

352. Найдите приближенное значение функции f в точках x_1 и x_2 , учитывая, что:

а) $f(x) = 2x^4 - x$, $x_1 = 2,017$ и $x_2 = 0,94$;

б) $f(x) = x^5 - 2x^2$, $x_1 = 1,994$ и $x_2 = 0,95$;

в) $f(x) = 3x^3 - x$, $x_1 = 4,03$ и $x_2 = 0,92$;

г) $f(x) = x^2 + 4x$, $x_1 = 5,08$ и $x_2 = 1,97$.

353. Вычислите приближенно $\sqrt{1,06}$ и, доказав неравенства $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ при положительных x , оцените погрешность вычисления.

354. Приближенное значение $\sqrt{2}$ можно высчитать, если использовать представление числа 2 произведением $4\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ или суммой $1 + 1$. Определите, в каком случае полученное приближение более точное.

355. Найдите приближенное значение выражения:

- а) $\sqrt{1,004}$; в) $\sqrt{0,994}$; д) $\sqrt{26}$; ж) $\sqrt{15,84}$;
 б) $\sqrt{25,011}$; г) $\sqrt{0,991}$; е) $\sqrt{49,021}$; з) $\sqrt{81,75}$.

356. Найдите приближенное значение выражения:

- а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; в) $\frac{1}{0,9994^{13}}$; д) $\frac{2}{0,994^{60}}$;
 б) $\frac{1}{0,998^{40}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$; е) $\frac{2}{1,0015^{70}}$.

357. Из рисунков 200—211 укажите тот, на котором изображён график функции, заданной формулой:

- а) $y = x^3 + 1$; д) $y = \sqrt{x}$; и) $y = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{7}{2}$;
 б) $y = 4x - x^2$; е) $y = 1 - \frac{1}{x^2}$; к) $y = -2x + 4$;
 в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; ж) $y = x + \frac{1}{x}$; л) $y = -2x - 4$;
 г) $y = 3x^2$; з) $y = x + 5$; м) $y = -2$.

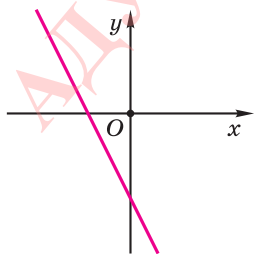


Рис. 200

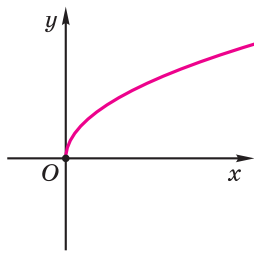


Рис. 201

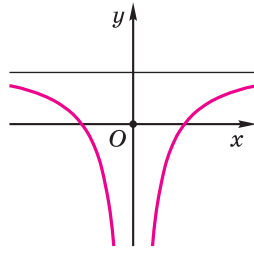


Рис. 202

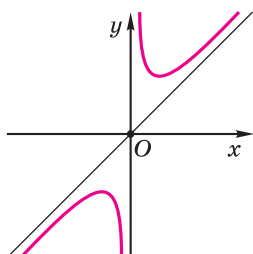


Рис. 203

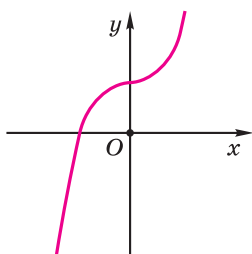


Рис. 204

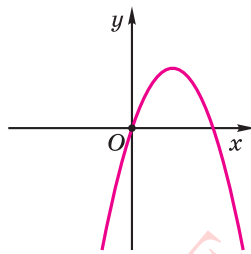


Рис. 205

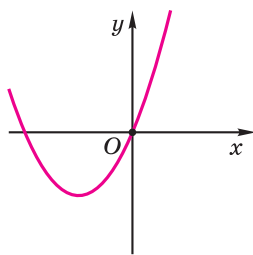


Рис. 206

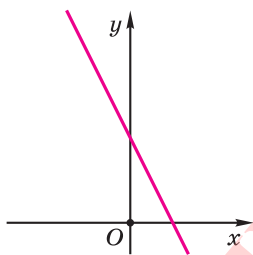


Рис. 207

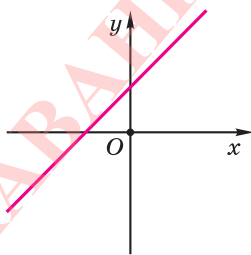


Рис. 208

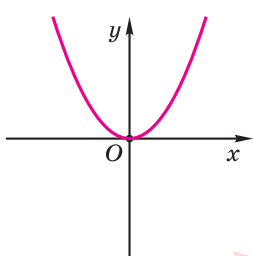


Рис. 209

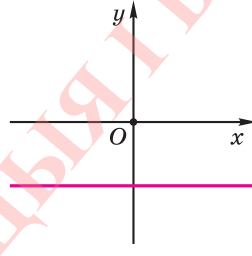


Рис. 210

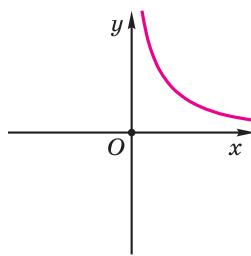


Рис. 211

358. Определите, что будет производной площади круга как функции радиуса. Как объяснить этот результат?

359. Докажите, что треугольник ABC , в котором $AB = 2AC \cos A$, является равнобедренным.

360. Меньшая сторона треугольника равна 11 см, а разность двух других — 4 см. Найдите косинусы углов этого треугольника, учитывая, что средний по величине угол равен 60° .

361. С двух полей суммарной площадью 121 га было собрано 6300 ц пшеницы. Урожайность на первом поле

составила 56 ц/га, на втором — 49 ц/га. Найдите урожай, собранный с первого поля.

362. Урожайности пшеницы с двух участков площадью 65 га и 50 га в сумме составили 117 ц/га. Определите, сколько зерна собрали с каждого участка, учитывая, что средняя урожайность на поле, состоящем из этих участков, оказалась равной 57 ц/га.

* * *

363. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 1 \leq 0, \\ 2y^2 + 2y - x \leq 0. \end{cases}$$

364. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ отмечены такие точки F и G , что треугольник CFG — правильный. Найдите площадь треугольника AFG , учитывая, что площади треугольников CBF и CDG равны соответственно S_1 и S_2 .

365. В однокруговом турнире участвуют 8 команд, из которых 4 выходят в финал. Какое наименьшее количество очков должна набрать команда, чтобы обеспечить себе выход в финал, если за победу даётся 2 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0?

III

раздел

Параллельность прямых и плоскостей

8. Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые пространства называются **параллельными** прямыми, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. Это утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 1. *Через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.*

Доказательство. Пусть есть прямая a и точка M вне её (рис. 212). По теореме 4 из параграфа 2 через прямую a и точку M проходит единственная плоскость — плоскость α . В плоскости α через точку M проходит единственная прямая — прямая b , параллельная прямой a . Прямая b — искомая прямая, и она единственная.

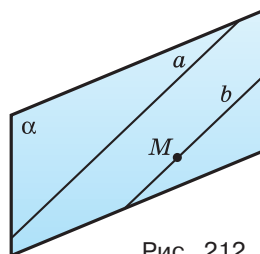


Рис. 212

На плоскости если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, то и другая также пересекает её. Аналогичное утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 2. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

Доказательство. Пусть есть две параллельные прямые b и c и одна из них — прямая b — пересекает плоскость β в точке M (рис. 213).

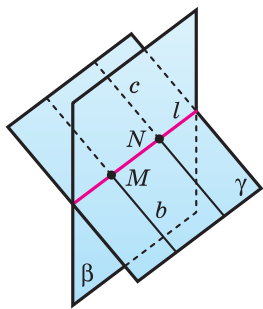


Рис. 213

Поскольку прямые b и c параллельны, то они лежат в одной плоскости, пусть это плоскость γ . Плоскости β и γ имеют общую точку M , поэтому по аксиоме 3 они имеют общую прямую l . Эта прямая лежит в плоскости γ и пересекает прямую b в точке M , поэтому она пересекает параллельную ей прямую c в некоторой точке N . Поскольку прямая l лежит и в плоскости β , то точка N принадлежит этой плоскости. Значит, точка N — общая точка плоскостей β и γ .

Остаётся доказать, что прямая c с плоскостью β не имеет других общих точек. Допустим, что это не так. Пусть прямая c имеет с плоскостью β ещё одну общую точку K . Тогда по аксиоме 2 прямая c лежит в плоскости β . Получается, что прямая c — общая прямая плоскостей β и γ . Но такой прямой является прямая l . Значит, прямая c совпадает с прямой l , что невозможно, так как прямая b параллельна прямой c и пересекает прямую l .

Вы знаете, что если на плоскости две прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. Докажем, что такое утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 3. *Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны и друг другу.*

Доказательство. Пусть прямые m и n параллельны прямой p (рис. 214). Докажем, что прямая m параллельна прямой n , т. е. что прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются.

На прямой m выберем произвольно точку A , через неё и прямую n проведём плоскость α . Докажем, что прямая m лежит в этой плоскости. Допустим, что это не так. Учитывая, что прямая m имеет с плоскостью α общую точку, нужно согласиться с тем, что прямая m пересекает плоскость α . Тогда по теореме 2 эту плоскость пересекает прямая p , так как она параллельна прямой m , и прямая n , которая параллельна прямой p . Но

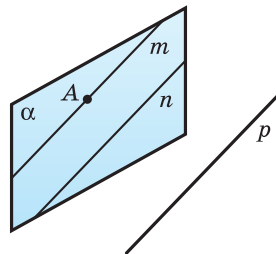


Рис. 214

такое невозможно, так как прямая n лежит в плоскости α . Значит, прямая m вместе с прямой n лежит в плоскости α .

Прямые m и n не пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. что прямые m и n пересекаются в некоторой точке B . Получается, что через точку B проходят две различные прямые m и n , параллельные прямой p , что противоречит теореме 1.

Используя теорему 3, можно доказать важные утверждения о параллелепипеде.

Теорема 4. У параллелепипеда:

- а) противоположные грани равны;*
- б) все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*

Доказательство. Пусть есть параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 215).

а) Докажем, например, равенство противоположных граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Отрезки AB и $A_1 B_1$, а также BC и $B_1 C_1$ равны как противоположные стороны параллелограммов $ABB_1 A_1$ и $BCC_1 B_1$ соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 параллельны и равны друг другу, так как каждый из них параллелен

отрезку BB_1 и равен ему. Значит, четырёхугольник $ACC_1 A_1$ — параллелограмм. А поэтому отрезки AC и $A_1 C_1$ равны друг другу как противоположные стороны этого параллелограмма.

Поскольку $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$ и $AC = A_1 C_1$, то треугольники ABC и $A_1 B_1 C_1$ равны. Поэтому равны углы ABC и $A_1 B_1 C_1$. Значит, равны друг другу и параллелограммы-грани $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$.

б) Докажем, что все диагонали параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Четырёхугольник $AA_1 C_1 C$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны AA_1 и CC_1 каждая равна отрезку DD_1 и параллельна ему и потому равны и параллельны друг другу (рис. 216). Поэтому диагонали AC_1 и CA_1 точкой пересечения O делятся пополам.

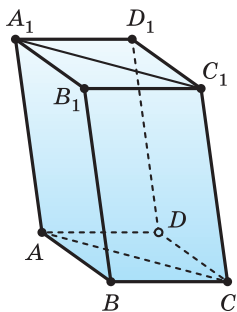


Рис. 215

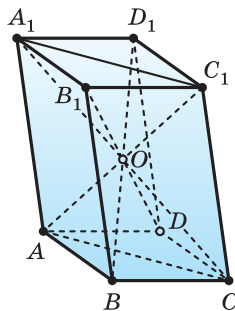


Рис. 216

Четырёхугольник DCB_1A_1 — также параллелограмм, поэтому его диагональ DB_1 пересекает другую диагональ CA_1 в её середине, т. е. в точке O .

Наконец, четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, поэтому его диагональ BD_1 пересекает другую диагональ AC_1 в её середине O .

Если две прямые пересекаются (рис. 217) или параллельны (рис. 218), то они лежат в одной плоскости. Две прямые, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися** (рис. 219). Докажем *признак скрещивающихся прямых*.

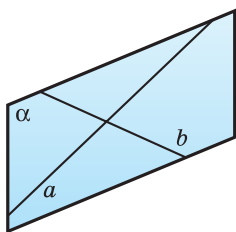


Рис. 217

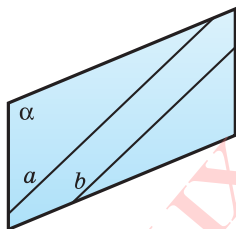


Рис. 218

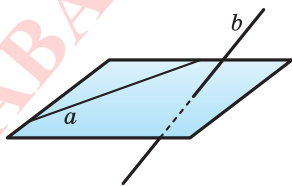


Рис. 219

Теорема 5. *Если из двух прямых одна принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.*

Доказательство. Пусть прямая p лежит в плоскости α , а прямая q пересекает эту плоскость в точке A , не принадлежащей прямой p (рис. 220). Докажем, что прямые p и q скрещиваются.

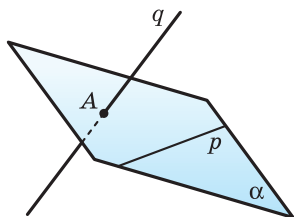


Рис. 220

Допустим, что прямые p и q лежат в некоторой плоскости β . Тогда плоскости β принадлежат прямая p и точка A , которая принадлежит прямой q , и, значит, плоскость β совпадает с плоскостью α . Получили, что плоскости α принадлежит прямая q , которая по условию ей не принадлежит. Это противоречие означает, что сделанное допущение ложно.

Мы знаем, что *углом между пересекающимися прямыми* называется величина одного из четырёх образовавшихся при этом углов, который не больше 90° (рис. 221).

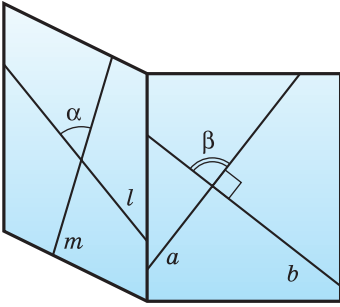


Рис. 221

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Докажем, что это определение корректное, т. е. не зависит от выбора точки, через которую проходят прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

Теорема 6. *Угол между пересекающимися прямыми равен углу между параллельными им прямыми, которые пересекаются в другой точке.*

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O , прямые a_1 и b_1 — в точке O_1 и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 222).

От точки O на прямой a отложим равные отрезки OA и OB , а на прямой b — отрезок OC , равный отрезку OA . Через точки A и B проведём прямые, параллельные прямой OO_1 , они пересекут прямую a_1 в точках A_1 и B_1 соответственно. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой OO_1 , она пересечёт прямую b_1 в точке C_1 .

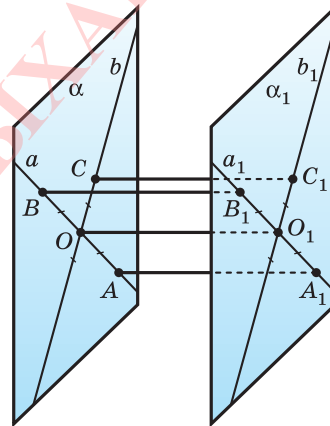


Рис. 222

Четырёхугольник OO_1A_1A является параллелограммом, так как его противоположные стороны OA и O_1A_1 параллельны и равны. Поэтому $AA_1 = OO_1$ и $AA_1 \parallel OO_1$. Аналогично, поскольку четырёхугольник OO_1B_1B — параллелограмм, то $BB_1 = OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, а поскольку OO_1C_1C — параллелограмм, то $CC_1 = OO_1$ и $CC_1 \parallel OO_1$.

Поскольку каждый из отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 равен и параллелен отрезку OO_1 , то они равны и параллельны друг другу. Поэтому четырёхугольники AA_1C_1C и BB_1C_1C оба являются параллелограммами и, значит, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$.

Теперь по признаку равенства треугольников по трём сторонам можно утверждать, что $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$ и $\Delta BOC = \Delta B_1O_1C_1$, а потому $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ и $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Таким образом, мы доказали, что углы, образованные при пересечении прямых a и b , такие же, как и при пересечении прямых a_1 и b_1 .

На рисунке 223 показано, как можно найти угол между скрещивающимися прямыми: выбрать произвольно точку A пространства и через неё провести прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Понятно, что точка A может быть выбрана и на одной из скрещивающихся прямых.

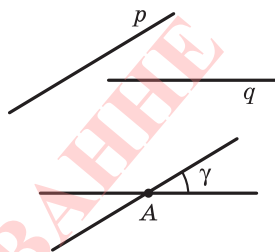


Рис. 223

Пример. На рисунке 224 точки A и B — точки пересечения диагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ и EE_1F_1F параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Построим угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1 . Для этого в плоскости E_1FG_1 , которой принадлежат точка G_1 и прямая AB , через точку G_1 параллельно прямой AB проведём прямую. Это прямая G_1F . Угол FG_1H — искомый угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1 .

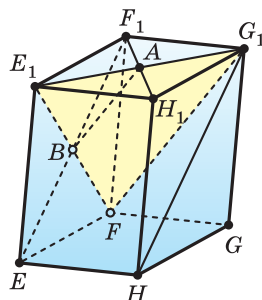


Рис. 224

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Прямые, угол между которыми равен 90° , называются **перпендикулярными прямыми**.

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися, а могут быть и скрещивающимися. Например, перпендикулярные прямые AC и AG , которые проходят через соответствующие рёбра прямоугольного параллелепипеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 225), пересекаются, а перпендикулярные прямые AC и EE_1 скрещиваются.

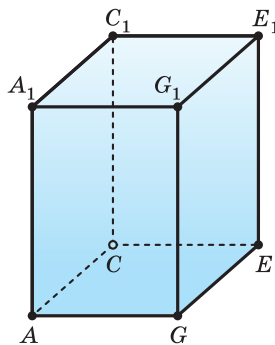


Рис. 225



1. Сформулируйте утверждение о прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой.
2. Какие две прямые пространства называются параллельными; пересекающимися; скрещивающимися?
3. Сформулируйте утверждение о параллельных прямых, из которых одна пересекает данную плоскость.
4. Сформулируйте утверждение о прямых, параллельных некоторой прямой.
5. Сформулируйте свойство противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.
6. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
7. Какой угол называют углом между пересекающимися прямыми; скрещивающимися прямыми; параллельными прямыми?
8. Как построить угол между скрещивающимися прямыми?
9. Какие прямые называют перпендикулярными?

366. Определите, пересекаются ли прямые, на которых лежат основания двух треугольников, имеющих общую среднюю линию.

367. Параллелограмм $MNKL$ и треугольник NAK не лежат в одной плоскости. Прямая a проходит через точку P прямой AK и параллельна прямой NK . Докажите, что прямая a параллельна прямой ML .

368. Параллелограммы $MNLK$ и $MNXY$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырёхугольник $KLXY$ является параллелограммом.

369. Есть правильная четырёхугольная пирамида $PMNKL$. На прямой PL выбрана точка D , через которую проведена прямая l , параллельная прямой LK . Докажите, что прямые MN и l параллельны.

370. На отрезке AB , конец A которого принадлежит плоскости α , выбрана точка C , и через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках B_1 и C_1 . Найдите отрезок CC_1 , учитывая, что:

- а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 14$ см;
- б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 50$ см.

371. Имеются параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK , причём эти четырёхугольники не лежат в одной плоскости.

а) Установите взаимное расположение прямых OP и EK .

б) Найдите периметр трапеции, учитывая, что в неё можно вписать окружность, а её основания MN и EK соответственно равны 45 см и 55 см.

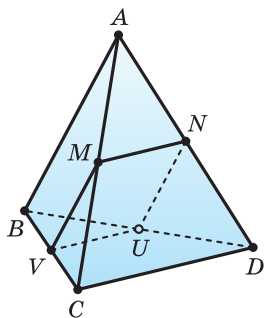


Рис. 226

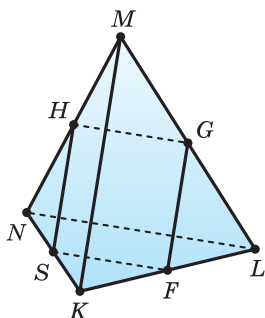


Рис. 227

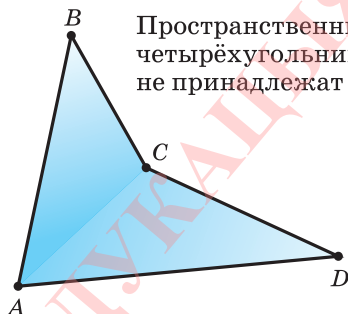


Рис. 228

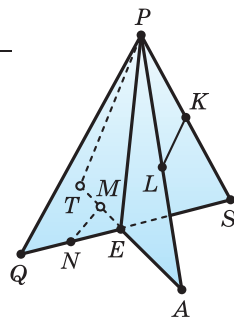


Рис. 229

372. Точки M, N, U, V — соответственно середины рёбер AC, AD, BD, BC треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 226). Найдите периметр четырёхугольника $MNUV$, учитывая, что $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

373. Точки H, G, F, S — середины рёбер MN, ML, LK, KN треугольной пирамиды $KLMN$ (рис. 227). Найдите периметр четырёхугольника $HGFS$, учитывая, что $LK = 18$ мм, $MN = 22$ мм.

374. Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника (рис. 228) являются вершинами параллелограмма.

375. Отрезок PE — общая медиана треугольников QPS и TPA , а точки K, L, M, N — середины отрезков PS, PA, ET, EQ (рис. 229). Докажите, что прямые KL и MN параллельны.

Пространственный четырёхугольник — четырёхугольник, вершины которого не принадлежат одной плоскости.

376. Определите, может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельной третьей прямой.

377. Докажите, что если AB и CD — скрещивающиеся прямые, то AD и BC — также скрещивающиеся прямые.

378. Точки M, N, P — соответственно середины рёбер HE, HF, HG треугольной пирамиды $EFGH$, а точка K ле-

жит на отрезке FN . Определите взаимное расположение прямых:

- а) NH и EF ; в) MN и EF ; д) KN и EG ;
б) PK и FG ; г) MP и EG ; е) MH и FG .

379. Через точку M вне прямой a проведены две прямые, не имеющие с прямой a общих точек. Докажите, что по крайней мере одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися.

380. Прямая m пересекает прямую k и не пересекает прямую l , параллельную прямой k . Докажите, что l и m — скрещивающиеся прямые.

381. Через вершину P ромба $PQRS$ проведена прямая a , параллельная диагонали QS , а через вершину R — прямая b , не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что:

- а) прямые a и RS пересекаются;
б) a и b скрещиваются.

382. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC . Определите взаимное расположение прямых m и BC , учитывая, что:

- а) прямая m лежит в плоскости ABC и не пересекает отрезок AC ;
б) прямая m не лежит в плоскости ABC .

383. Точки M и N выбраны на скрещивающихся прямых a и b соответственно. Через прямую a и точку N проведена плоскость α , а через прямую b и точку M — плоскость β . Определите:

- а) лежит ли прямая b в плоскости α ;
б) пересекаются ли плоскости α и β и если пересекаются, то по какой прямой.

384. Прямые XU и VT — параллельные, а прямые XU и VT — скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми XU и VT , учитывая, что:

- а) $\angle YXU = 40^\circ$; б) $\angle YXU = 135^\circ$; в) $\angle YXU = 90^\circ$.

385. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что l и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, учитывая, что один из углов параллелограмма равен:

- а) 58° ; б) 133° .

386. Прямая m параллельна диагонали FH ромба $EFGH$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что скрещиваются прямые:

а) m и EG и найдите угол между ними;

б) m и EH и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle EFG = 128^\circ$.

387. Стороны AB и CD пространственного четырёхугольника $ABCD$ равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середину отрезков BC и AD .

388. Точки P, Q, R, S — середины рёбер AB, BB_1, AD и диагонали B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 1 м, а боковое ребро равно 7 м (рис. 230). Определите, во сколько раз сторона PQ четырёхугольника $PQSR$ больше стороны QS .

389. Точки M и N — середины рёбер PC и PD треугольной пирамиды $PCDE$, а точки U и V — середины отрезков EM и EN (рис. 231). Определите, параллельны ли прямые MN и UV .

390. Диагонали граней $L_1 K_1 M_1 N_1$ и $LL_1 N_1 N$ куба $LKMNL_1 K_1 M_1 N_1$ пересекаются в точках A и B соответственно, серединами рёбер MM_1 и MN являются точки F и G соответственно. Докажите, что прямые AS и FG параллельны.

391. $LKML_1 K_1 M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 м. Диагонали граней $LL_1 M_1 M$ и $MM_1 K_1 K$ пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 232). Найдите периметр и площадь четырёхугольника $XL_1 K_1 Y$.

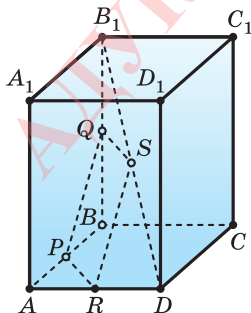


Рис. 230

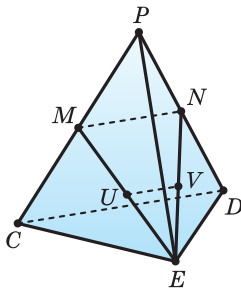


Рис. 231

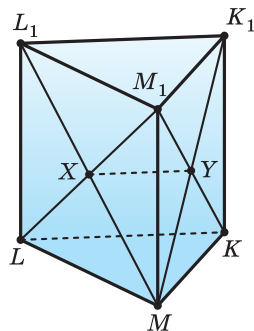


Рис. 232

392. Вершины M и N трапеции $MNLK$ с основаниями NL и KM принадлежат плоскости γ , а две другие вершины не принадлежат ей. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения прямой LK с плоскостью γ , учитывая, что $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

393. Точка P лежит на продолжении ребра NM параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N , учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

394. Отрезок XY имеет с плоскостью β единственную общую точку X . Через точку Y и середину Z отрезка XY проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β в точках Y_1 и Z_1 соответственно. Найдите длину отрезка YY_1 , учитывая, что $ZZ_1 = 10$ см.

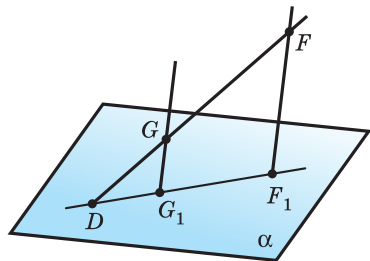


Рис. 233

395. Конец D отрезка DF принадлежит плоскости α , через другой его конец F и его точку G проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках F_1 и G_1 (рис. 233). Найдите длину отрезка GG_1 , учитывая, что $FF_1 = 32$ см и $DG : GF = 3 : 5$.

396. Точка E — точка отрезка TR , который не пересекает плоскость γ . Параллельные прямые, проведённые через точки T, R, E , пересекают плоскость γ в точках T_1, R_1, E_1 соответственно. Докажите, что точки T_1, R_1, E_1 лежат на одной прямой, и найдите отрезок EE_1 , учитывая, что $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

397. Точка P выбрана на ребре LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 234). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с плоскостью M_1N_1M прямой q , проходящей через точку P и параллельной прямой NK_1 .

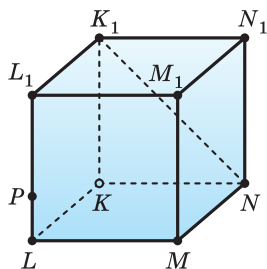


Рис. 234

398. На ребре HX треугольной пирамиды $HXYZ$ выбрана такая точка

S , что $HS : SX = 2 : 5$, через неё проведена прямая q , параллельная медиане HP грани HYZ . Найдите медиану HP , учитывая, что длина отрезка прямой q , расположенного внутри пирамиды, равна 35 см.

399. Через вершины D и Q треугольника PDQ со стороной PQ , равной 20 см, проведена плоскость α , которой не принадлежит вершина P . Учитывая, что прямая x параллельна прямой PQ и пересекает сторону PD в такой точке C , что $PC : CD = 2 : 3$:

- а) докажите, что прямая x пересекает плоскость α ;
- б) найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой x с плоскостью α .

400. На ребре GH треугольной пирамиды $FGHK$ с равными друг другу рёбрами выбрана такая точка T , что $HT : TG = 1 : 3$, и через неё проведена прямая h , параллельная медиане HM боковой грани KHF и пересекающая поверхность пирамиды в точке R . Найдите ребро пирамиды, учитывая, что $TR = 6$ см.

401. Через точку пересечения медиан грани MNK треугольной пирамиды $JMNK$ с равными друг другу рёбрами проведена прямая b , параллельная прямой MJ , а на ребре MJ отмечена его середина Z . Найдите площадь треугольника NZJ , учитывая, что отрезок прямой b , расположенный внутри пирамиды, равен m .

402. Найдите производную функции:

- а) $y = t^4 - t^2$; г) $y = 3t^4$;
- б) $y = 2t^2 - 3t + 5$; д) $y = \frac{t^6}{2}$;
- в) $y = 5t^4 - 7t^2 - t$; е) $y = t^5 + 2t^3 - \frac{1}{2t}$.

403. Найдите производную функции:

- а) $y = \sqrt[3]{s}$; б) $y = s\sqrt{s}$; в) $y = \frac{1}{s\sqrt{s}}$; г) $y = s^2 + \sqrt[3]{s^2}$.

404. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

- а) $y = 6x^5$; в) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x + 2$.
- б) $y = 5 + x^2 - 4x$;

405. В зависимости от параметра a найдите экстремумы функции:

а) $y = x(a + 1)^2$; в) $y = x^4 + ax^2 + 6$;

б) $y = x + \frac{a}{x}$; г) $y = x^3 + ax + 1$.

406. Докажите, что прямая AM , содержащая медиану треугольника ABC , одинаково удалена от точек B и C .

407. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . Учтывая, что $AB > AC$, установите:

а) какой из углов — ALB или ALC — больше;

б) какой из отрезков — BL или CL — больше.

408. У треугольников ABC и MNK равные периметры и равные пары углов A и M , а также B и N . Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

409. У треугольников ABC и MNK равные основания AB и MN , а также высоты и медианы, проведённые к ним. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

410. На катетах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBFE$. Из точек M и F на прямую AB опущены перпендикуляры MK и FG . Докажите, что $AK = BG$ и $MK + FG = AB$. Попробуйте сделать это разными способами.

411. Высота, проведённая к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит её на отрезки 2 см и 3 см, если считать от основания. Найдите площадь этого треугольника и радиус вписанной в него окружности.

412. Средняя линия трапеции равна 4 м, высота — 3 м. Найдите диагонали трапеции, учитывая, что они равны друг другу.

413. Найдите высоту трапеции, учитывая, что её диагонали равны 15 см и 20 см, а средняя линия — 12,5 см.

414. С одного поля собрали 1296 ц ржи, со второго — 672 ц. Найдите урожайность на каждом поле, учитывая, что средняя урожайность оказалась равной 41 ц/га, а площадь первого поля на 6 га больше.

415. На отрезке AB выбрали такую точку O , что $OB : OA = 9 : 8$, и на отрезках-частях OA и OB как на катетах построили прямоугольные треугольники OAC и OBD с площадями 744 мм^2 и 1296 мм^2 соответственно (рис. 235).

Найдите катеты этих треугольников, учитывая, что третий прямоугольный треугольник ABE , построенный на отрезке AB как на катете с площадью, равной суммарной площади треугольников OAC и OBD , имеет другой катет длиной 40 мм.

416. На отрезке MN выбрали такую точку A , что $AM : AN = 11 : 7$, и на отрезках-частях AM и AN как на высотах построили прямоугольные параллелепипеды с объёмами 1804 см^3 и 644 см^3 соответственно (рис. 236). Найдите площади оснований этих параллелепипедов, учитывая, что площадь основания третьего параллелепипеда, построенного на отрезке MN как на высоте с объёмом, равным суммарному объёму первого и второго параллелепипедов, оказалась равной 34 см^2 .

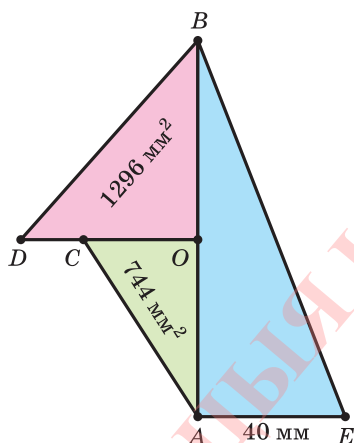


Рис. 235

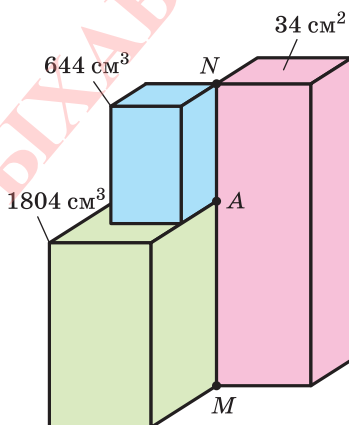


Рис. 236

* * *

417. Точка M — середина медианы $СК$ треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники AMK и BMK , равны. Найдите стороны AC и BC , учитывая, что $AB = 8$ и $СК = 6$.

418. Сколько есть квадратных уравнений $x^2 - tx - n = 0$, где t и n — натуральные числа, которые имеют положительный корень, не превосходящий:

- а) 5; б) 2010?

419. На какое наименьшее количество выпуклых четырехугольников можно разрезать выпуклый 17-угольник?

9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

В пространстве общих точек у прямой и плоскости может быть ни одной, одна или более одной.

Если у прямой и плоскости общих точек более одной, то, как утверждает аксиома 2, сама прямая принадлежит плоскости (рис. 237).

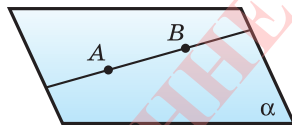


Рис. 237

Прямая и плоскость могут иметь единственную общую точку. Пусть α — некоторая плоскость (рис. 238). Выберем точку A на плоскости α и точку M вне плоскости α . Точки A и M определяют единственную прямую l , которая не имеет с плоскостью α иных общих точек, кроме точки A . Действительно, если допустить обратное, то по аксиоме 2 прямая l будет лежать в плоскости α , а значит, в этой плоскости будет лежать и точка M , что противоречит её выбору.

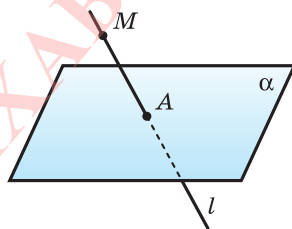


Рис. 238

Прямая и плоскость, которые имеют единственную общую точку, называются **пересекающимися**.

Прямая и плоскость могут не иметь общих точек. В этом случае говорят, что прямая a **параллельна** плоскости α , и пишут $a \parallel \alpha$. Докажем *признак параллельности прямой и плоскости*.

Теорема 7. Если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая l параллельна прямой k , принадлежащей плоскости β (рис. 239). Нужно доказать, что прямая l не имеет общих точек с плоскостью β . Допустим, что это не так, т. е. что прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке U . Эта точка не может ле-

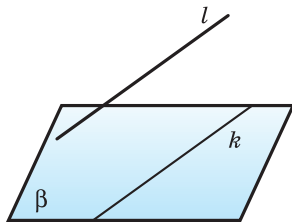


Рис. 239

жать на прямой k , так как $k \parallel l$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых получаем, что прямые k и l — скрещивающиеся. А это противоречит тому, что прямые k и l параллельны. Значит, прямая l и плоскость β не могут иметь общих точек, т. е. $l \parallel \beta$.

Докажем свойство прямой, параллельной плоскости.

Теорема 8. *Линия пересечения плоскостей, из которых одна проходит через прямую, параллельную другой плоскости, параллельна этой прямой.*

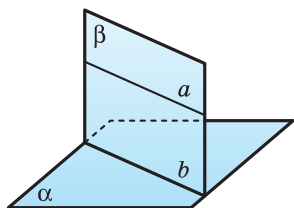


Рис. 240

Доказательство. Пусть прямая a , параллельная плоскости α , принадлежит плоскости β и прямая b — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 240). Тогда прямые a и b обе лежат в плоскости β и не пересекаются, так как в противном случае прямая a пересекала бы плоскость β . Значит, прямые a и b параллельны.

Пример 1. Докажем, что *через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.*

Пусть прямые a и b — скрещивающиеся (рис. 241). На прямой a выберем произвольно точку U и через неё проведём прямую c , параллельную прямой b . Прямые a и c пересекаются, поэтому через них проходит единственная плоскость α . Плоскость α параллельна прямой b , так как прямая b не лежит в плоскости α и параллельна прямой c , лежащей в плоскости α .

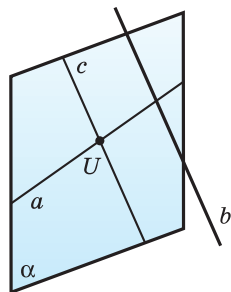


Рис. 241

Пример 2. Построим сечение правильной четырёхугольной пирамиды $FABCD$ плоскостью α , которая проходит через ребро AB и точку X на ребре FC (рис. 242).

Определим, по какой линии пересекает поверхность пирамиды плоскость α , которой принадлежат прямая AB и

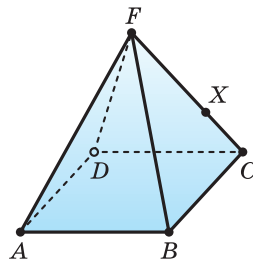


Рис. 242

точка X . Плоскость α и грань FAB имеют общий отрезок AB , по нему плоскость α и пересекает грань FAB . Грань FBC имеет с плоскостью α общие точки B и X , поэтому отрезок BX — общая часть грани FBC и плоскости α (рис. 243). Плоскость α и грань FCD имеют общую точку X , поэтому линией пересечения плоскостей α и FCD является прямая, проходящая через точку X . Теперь обратим внимание на то, что отрезки AB и CD как противоположные стороны квадрата $ABCD$ параллельны. Поэтому прямая AB параллельна плоскости FCD . По теореме 8 плоскость α , проходящая через прямую AB , пересекает плоскость FCD по прямой, параллельной AB . Таким образом, плоскость α пересекает грань FCD по отрезку XY , который параллелен рёбрам AB и CD . Грань FAD имеет с плоскостью α общие точки A и Y , поэтому плоскость α пересекает грань FAD по отрезку AY .

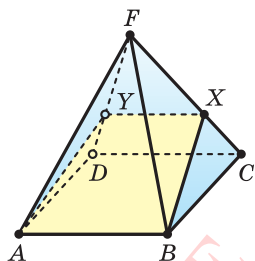


Рис. 243

Получили, что плоскость α пересекает пирамиду $FABCD$ по трапеции $ABXY$.



1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте свойство прямой, параллельной плоскости.

420. Докажите, что прямая s , пересекающая прямые a и b одной плоскости, также лежит в этой плоскости.

421. Докажите, что если стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость, то прямые AD и DC также пересекают эту плоскость.

422. Средняя линия трапеции лежит в плоскости β . Определите, какие стороны трапеции пересекают плоскость β .

423. Плоскость α проходит через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне BC . Докажите, что плоскости α принадлежит середина стороны AC .

424. Есть прямая a , параллельная плоскости α , и точка T , принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая параллельна прямой a и проходит через точку T , лежит в плоскости α .

425. Одно основание трапеции параллельно плоскости β , а вершина второго лежит в этой плоскости. Докажите, что:

- а) другое основание трапеции лежит в плоскости β ;
- б) средняя линия трапеции параллельна плоскости β .

426. Треугольники ABC и ABD лежат в различных плоскостях. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой CD , пересекает эти плоскости.

427. Точки P и Q лежат в плоскости α , а точка R не лежит в ней. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PR и QR , параллельна плоскости α .

428. Вне плоскости прямоугольника $UVXY$ выбрана точка Z . Докажите, что прямая UV параллельна плоскости XYZ .

429. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T . Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC .

430. Докажите, что если данная прямая не лежит в пересекающихся плоскостях и параллельна линии их пересечения, то она параллельна и этим плоскостям.

431. Учитывая, что плоскость α проходит через основание ST трапеции $SURT$ и не проходит через вершину R , а точка A лежит в плоскости α (рис. 244):

а) докажите, что средняя линия MN трапеции параллельна плоскости α ;

б) установите, параллельна ли плоскости α средняя линия BC треугольника UAR .

432. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $IJKL$. Докажите, что прямая KL параллельна плоскости IDJ .

433. На ребре DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбрана точка Q (рис. 245). Сделайте такой рисунок в тетради и построй-

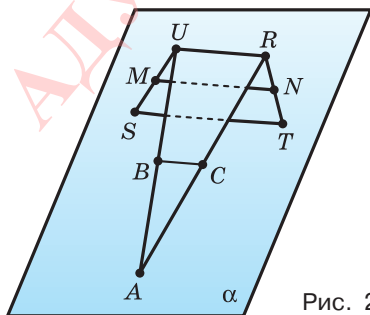


Рис. 244

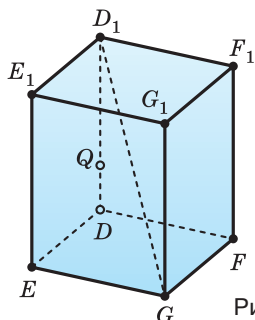


Рис. 245

те точку пересечения с поверхностью куба прямой s , проходящей через точку Q и параллельной прямой D_1G .

434. Есть параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на ребре SS_1 которого выбрана точка B (рис. 246). Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, Q, P_1 .

435. Точка A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а точка B — середина отрезка NA . Докажите, что плоскость MBQ пересекает прямую AP .

436. На рисунке 247 изображена четырёхугольная пирамида, основанием которой является трапеция $MNKL$ с параллельными сторонами KL и MN . Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку B ребра SL и прямую MN . Какой фигурой является сечение?

437. Прямая a параллельна каждой из двух плоскостей, пересекающихся по прямой AB . Докажите, что прямые a и AB параллельны.

438. Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то линии их пересечения или параллельны, или имеют общую точку.

439. Сторона RT треугольника RST параллельна плоскости γ , а стороны RS и ST пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники RST и MSN подобны.

440. На отрезке AB выбрана такая точка C , что $AB : BC = 4 : 3$. Через конец B отрезка AB проведена плоскость α . Параллельно этой плоскости построен отрезок CD , равный 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E , и найдите отрезок BE .

441. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны так, что $DE = 5$ см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость, про-

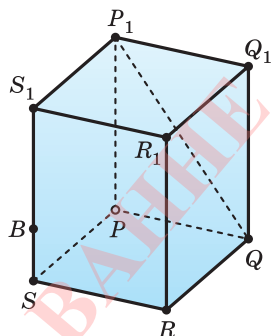


Рис. 246

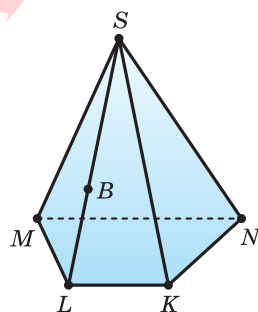


Рис. 247

ведённая через точки B и C , оказалась параллельной отрезку DE . Найдите длину отрезка BC .

442. Основание LM трапеции $KLMN$ равно 48 см. Вне плоскости трапеции выбрана точка O и отмечена середина P отрезка LO . Докажите, что плоскость KNP пересекает отрезок OM в некоторой точке H , и найдите отрезок PH .

443. Постройте сечение параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через ребро EE_1 и точку A на ребре CC_1 .

444. Учитывая, что точки Q, H, G — середины диагоналей SE_1, S_1R_1, R_1T соответствующих граней куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рис. 248):

а) установите, параллельна ли прямая QH плоскости SS_1T_1 ;

б) докажите, что прямая HG параллельна плоскости E_1ER .

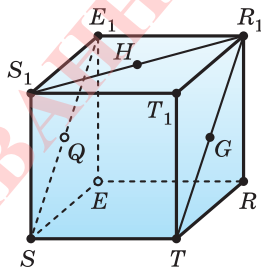


Рис. 248

445. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $TPQUV$ равны между собой, точки B, C, D — середины рёбер TP, TV, TU . Через точку B проведена прямая p , параллельная прямой CD . Постройте точку A пересечения прямой p с плоскостью TQU и найдите площадь основания пирамиды, учитывая, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S .

446. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны a . Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b , которая параллельна медиане YR грани XYZ и проходит через точку A . Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри пирамиды.

447. Через точку пересечения медиан грани MPQ треугольной пирамиды $MNPQ$ проведена прямая, параллельная медиане PA грани MNP . Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка этой прямой, учитывая, что $PA = m$.

448. Все рёбра правильной треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны друг другу, а точка S — середина диагонали XZ_1 грани XX_1Z_1Z (рис. 249). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку пересечения с гранью XX_1Y_1Y прямой p , которая параллельна медиане Z_1T грани $X_1Y_1Z_1$ и проходит через точку S ;

б) найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что длина отрезка прямой p , расположенного внутри призмы, равна 10 см.

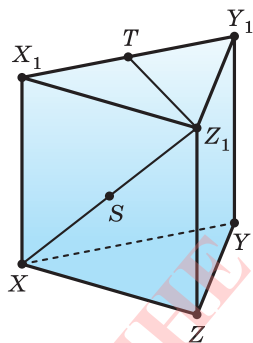


Рис. 249

449. Все рёбра треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны между собой, Q — точка пересечения медиан грани XYZ . Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, параллельной прямой ZQ и проходящей через середину отрезка X_1Q , учитывая, что площадь боковой поверхности призмы равна S .

450. Учitando, что точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, что отрезок MN параллелен плоскости, в которой лежит грань CDD_1C_1 ;

б) найдите длину отрезка MN , учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

451. Точки E, F, G — середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $MNKL$. Постройте точку H , в которой плоскость EFG пересекает ребро MN , и докажите, что отрезки EG и FH пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

452. Есть правильная треугольная пирамида $MNPQ$, длина бокового ребра которой равна 6 см, а основанием является треугольник со стороной 4 см. Найдите периметр сечения пирамиды плоскостью, параллельной NP и проходящей через середину ребра PQ и среднюю линию треугольника MNP .

453. На рисунке 250 изображена правильная треугольная пирамида $IJKL$. Четырёхугольник $XYZT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины X и Y рёбер JI

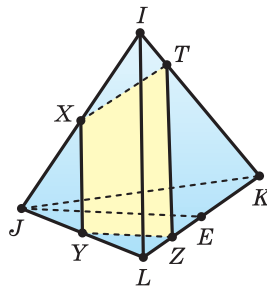


Рис. 250

и JL и параллельно медиане JE грани JKL . Найдите длины отрезков XY и ZT , учитывая, что $IK = 48$ см.

454. Точка Q — середина ребра FA четырёхугольной пирамиды $FABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами BC и AD . Найдите отрезок, по которому плоскость QBC пересекает грань FAD , учитывая, что ребро BC и средняя линия трапеции соответственно равны 30 см и 40 см.

455. Точки A, B, C — середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $LMNK$, все рёбра которой равны друг другу, а площадь грани равна $16\sqrt{3}$ см². Найдите периметр сечения этой пирамиды плоскостью ABC .

456. Точки A, B, C — середины рёбер FE, GH, GK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит параллелограмм $GHEK$. Постройте отрезок, по которому плоскость ABC пересекает диагональное сечение FHK пирамиды.

457. Точка A — середина ребра FK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит трапеция $GHEK$, $HE \parallel KG$. Постройте точку P , в которой плоскость AEN пересекает прямую FG . Докажите, что отрезки PE и HA пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, учитывая, что средняя линия трапеции $GHEK$ равна $\frac{3}{2} HE$.

458. Есть правильная четырёхугольная пирамида $FMNKL$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна S . Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, параллельной медиане FR грани FLK и проходящей через точку пересечения диагоналей основания.

459. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 60 см, а боковое ребро — 78 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной какому-либо боковому ребру и проходящей через середины двух противоположных сторон основания, и найдите площадь сечения.

460. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{s^5}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{s}}$; в) $y = \sqrt{s} - \frac{1}{s}$; г) $y = \frac{s^2 + 2s}{\sqrt{s}}$.

461. Докажите, что функция:

а) $y = x + 4x^3$ возрастает на всей координатной прямой;

б) $y = \frac{1-x}{x+2}$ убывает на промежутках $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$.

462. Найдите функцию, производная которой равна:

а) 0; в) $-2x$; д) $3x^2$;

б) $-\frac{1}{2}$; г) $2x - 1$; е) $-3x^2 - 5$.

463. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс его острых углов. Сравните результаты и сделайте выводы. Какие зависимости здесь проявляются?

464. Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и α — тупой угол, найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

465. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 30 м/с, другое со скоростью 44 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 39 м/с (рис. 251). Найдите массы тел, учитывая, что импульс системы равен $1092 \text{ г} \cdot \text{м/с}$.

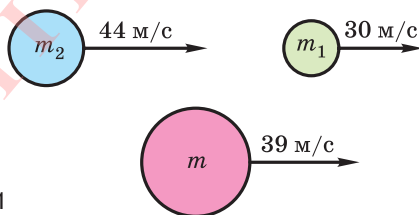


Рис. 251

466. Два тела движутся в одном направлении — одно со скоростью 30 м/с, другое со скоростью 43 м/с и догоняет первое. После абсолютно неупругого столкновения они продолжают двигаться вместе как одна система со скоростью 38 м/с. Найдите массы тел, учитывая, что импульс первого тела на $388 \text{ г} \cdot \text{м/с}$ меньше.

467. Если сложить импульс одного тела массой 9 г с импульсом второго тела массой 30 г, то получится $840 \text{ г} \cdot \text{м/с}$. Найдите скорости тел, учитывая, что если бы третье тело имело такой импульс и двигалось со скоростью, равной суммарной скорости первого и второго тел, то его масса была бы равной 20 г.

468. Импульс первого тела массой 9 г меньше импульса второго тела массой 27 г на 495 г · м/с. Найдите скорости тел, учитывая, что если бы третье тело имело импульс, равный суммарному импульсу первого и второго тел, и двигалось со скоростью, равной сумме скоростей этих тел, то его масса была бы равной 19 г.

* * *

469. Найдите сумму квадратов корней уравнения
 $(x^2 + 2x)^2 + 2010 = 2007(x^2 + 2x)$.

470. На стороне BC треугольника ABC отмечена такая точка K , что $KC = AB = 1$. Найдите отрезок BK , учитывая, что $\angle KAB = 90^\circ$ и $\angle KAC = 30^\circ$.

471. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2010. Разрешается взять несколько чисел, сумма которых кратна 7, вычеркнуть их и записать на доске частное от деления этой суммы на 7. Может ли после нескольких таких действий на доске остаться только число 1?

10. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Две плоскости либо имеют общую точку, либо не имеют её. В первом случае, в соответствии с аксиомой 3, плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются по этой прямой (рис. 252). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис. 253).

Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными плоскостями**.

Представление о параллельных плоскостях дают поверхности потолка и пола или поверхности противоположных стен комнаты (рис. 254). Следующая теорема даёт *признак параллельности плоскостей*.

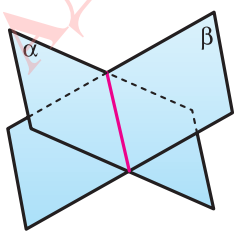


Рис. 252

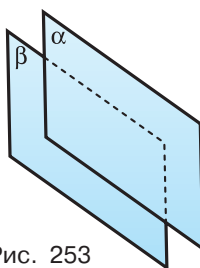


Рис. 253

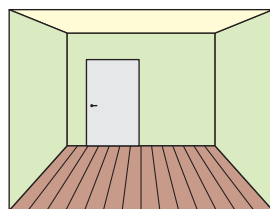


Рис. 254

Теорема 9. *Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, параллельна этой плоскости.*

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через пересекающиеся прямые m и n , которые обе параллельны плоскости β (рис. 255). Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β .

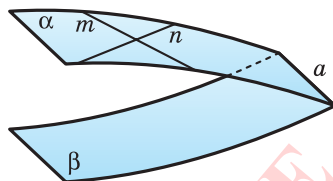


Рис. 255

Допустим, что плоскость α пересекает плоскость β по некоторой прямой a . Тогда по теореме 8 прямая a параллельна и прямой m , и прямой n . Значит, по теореме 3 прямые m и n параллельны друг другу. Но это противоречит условию о том, что они пересекаются. Значит, плоскость α параллельна плоскости β .

Следствие 1. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.*

Это следствие получается из теоремы 9 с учётом признака параллельности прямой и плоскости.

Следствие 2. *Противоположные грани параллелепипеда параллельны, т. е. лежат в параллельных плоскостях.*

Например, грань AA_1B_1B параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 256) содержит прямые AB и AA_1 , а грань DD_1C_1C — прямые DC и DD_1 . Поскольку $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$, и, значит, плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны.

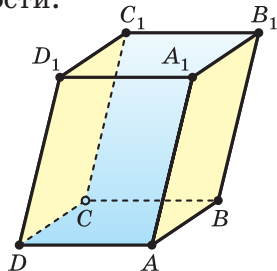


Рис. 256

Докажем свойство параллельных плоскостей.

Теорема 10. *Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.*

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b (рис. 257). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Допустим, что это не так, т. е. прямые a и b имеют общую точку Q . Тогда точка Q принадлежит плоскости α , так как

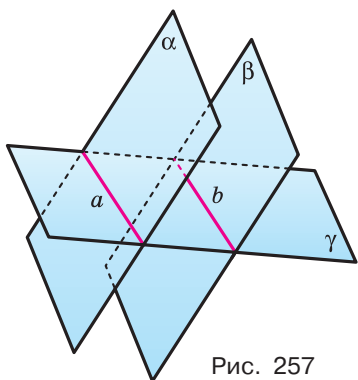


Рис. 257

прямая a принадлежит плоскости α , точка Q принадлежит и плоскости β , так как прямая b принадлежит плоскости β . Получается, что плоскости α и β имеют общую точку Q , но это невозможно, так как по условию плоскости α и β параллельны. Значит, прямые a и b не могут иметь общей точки. А поскольку они лежат в одной плоскости, именно в плоскости γ , то они параллельны.

Пример 1. Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересечён плоскостью, проходящей через середины M , N , O его рёбер DD_1 , AA_1 , $A_1 B_1$ соответственно. Определим, какая фигура получается в сечении.

Плоскость MNO пересекает грани $AA_1 D_1 D$ и $AA_1 B_1 B$ по отрезкам MN и NO (рис. 258), при этом $MN \parallel A_1 D_1$, так как MN — средняя линия прямоугольника $AA_1 D_1 D$. Поскольку плоскость MNO проходит через прямую MN , параллельную плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$, то линия пересечения этих плоскостей — прямая OP — параллельна MN . Четырёхугольник $MNOP$ — искомое сечение.

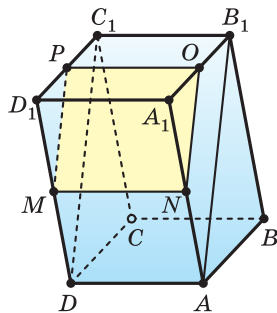


Рис. 258

Учтём, что плоскости граней $DD_1 C_1 C$ и $AA_1 B_1 B$ параллельны. Из теоремы 10 следует, что прямые NO и MP , по которым плоскости $DD_1 C_1 C$ и $AA_1 B_1 B$ пересекает плоскость MNO , параллельны. А поскольку $MN \parallel OP$ и $NO \parallel MP$, то четырёхугольник $MNOP$ — параллелограмм.

Теорема 11. *Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.*

► **Доказательство.** Пусть параллельные плоскости α и β высекают из параллельных прямых k и l отрезки AB и CD (рис. 259). Докажем, что эти отрезки равны.

Плоскость γ , которой принадлежат параллельные прямые k и l , пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым AC и BD . В результате получается четырёхугольник $ABDC$, в котором противоположные стороны параллельны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм, поэтому его противоположные стороны AB и CD равны.

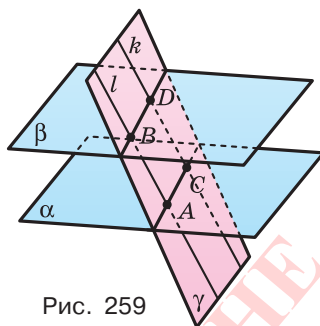


Рис. 259

Пример 2. Докажем, что отрезки произвольных прямых, заключённые между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.

Пусть параллельные плоскости α , β , γ высекают из прямой m отрезки AB и BC , а из прямой n отрезки DE и EF (рис. 260). Докажем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

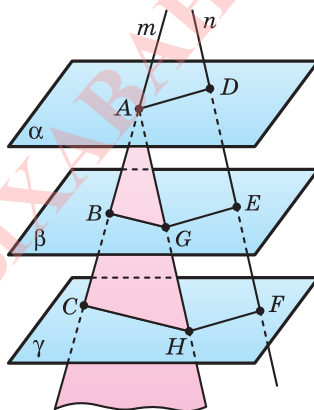


Рис. 260

Через точку A проведём прямую, параллельную прямой n , пусть она пересекается с плоскостями β и γ в точках G и H соответственно. В треугольнике ACH отрезок BG параллелен стороне CH . Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$. Но $AG = DE$ и $GH = EF$ в соответствии с теоремой 11. Значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. $\blacktriangleleft$

зок BG параллелен стороне CH . Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$. Но $AG = DE$ и $GH = EF$ в соответствии с теоремой 11. Значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. $\blacktriangleleft$

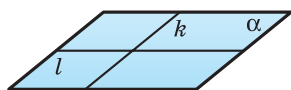
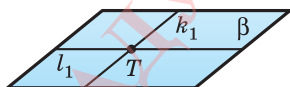


Рис. 261

Теорема 12. Через данную точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Доказательство. Пусть даны плоскость α и точка T вне её (рис. 261). В плоскости α проведём какие-либо пересекающиеся прямые k и l , а через точку T — прямые k_1 и l_1 , параллельные прямым k и l со-

ответственно. Плоскость β , определённая прямыми k_1 и l_1 , с учётом признака параллельности плоскостей, параллельна плоскости α и проходит через точку T .

Докажем единственность плоскости β . Допустим, что есть ещё одна плоскость γ , которая проходит через точку T и параллельна плоскости α (рис. 262). Через точку T и прямую k проведём плоскость δ . Она пересекает плоскость β по прямой k_1 , а плоскость γ по прямой k_2 , которые обе по теореме 10 параллельны прямой k . Но такое невозможно, так как в плоскости через данную точку параллельно данной прямой проходит единственная прямая.

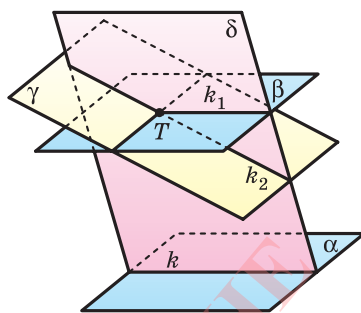


Рис. 262

Следствие 3. Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

Параллельные или пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость. Скрещивающиеся прямые определяют единственную пару параллельных плоскостей.

Пример 3. Докажем, что через скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости, причём такая пара плоскостей единственная.

Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 263). Выберем произвольно на прямой a точку X , на прямой b точку Y и через точку X проведём прямую b_1 , параллельную прямой b , а через точку Y — прямую a_1 , параллельную прямой a . Пересекающиеся прямые a и b_1 , а также b и a_1 определяют плоскости α и β , которые с учётом признака параллельности плоскостей являются параллельными.

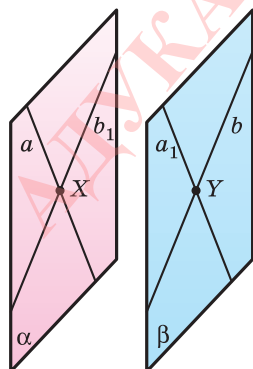


Рис. 263

Единственность искомой пары плоскостей доказывается методом от противного, подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 12. Проведите это рассуждение самостоятельно.

На рисунке 264 плоскости граней $STUV$ и $S_1T_1U_1V_1$ параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ проходят через скрещивающиеся прямые TU и U_1V_1 .

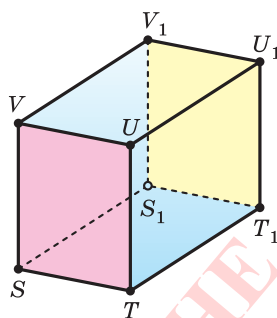


Рис. 264

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Какие плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Сформулируйте утверждение про отрезки, которые две параллельные плоскости высекают из параллельных прямых.
5. Сформулируйте утверждение про отрезки, которые три параллельные плоскости высекают из произвольных прямых.
6. Сформулируйте свойство линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.
8. Сформулируйте утверждение о плоскостях, которые параллельны одной плоскости.
9. Сформулируйте утверждение о параллельных плоскостях, определяемых парой скрещивающихся прямых.

472. Укажите модели параллельных плоскостей на предметах вашего класса.

473. Прямая m пересекает плоскость α в точке A . Существует ли плоскость, параллельная плоскости α , которая проходит через прямую m ?

474. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α . Докажите, что прямая m параллельна плоскости β .

475. Две стороны треугольника параллельны плоскости β . Докажите, что и третья сторона этого треугольника параллельна плоскости β .

476. Три отрезка P_1P_2 , Q_1Q_2 и R_1R_2 , не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $P_1Q_1R_1$ и $P_2Q_2R_2$ параллельны.

477. Учитывая, что точка T не лежит в плоскости треугольника ABC , а точки M , N , P — середины отрезков TA , TB , TC :

а) докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны;

б) найдите площадь треугольника MNP , учитывая, что площадь треугольника ABC равна 48 см^2 .

478. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость β , то она пересекает и любую плоскость, параллельную β .

479. Есть параллельные плоскости α и β , а также точка A на плоскости β . Докажите, что любая прямая, которая параллельна плоскости α и проходит через точку A , лежит в плоскости β .

480. Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a или параллельна другой плоскости, или лежит в ней.

481. Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых (рис. 265). Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

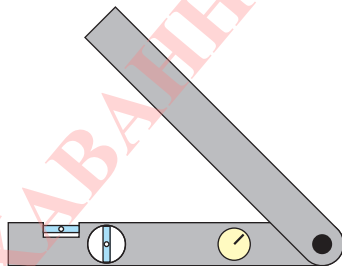


Рис. 265

482. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону CB угла BCD в точках B_1 и B_2 , а сторону CD — в точках D_1 и D_2 соответственно. Найдите:

а) CB_2 и CD_2 , учитывая, что $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 и CB_2 , учитывая, что $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

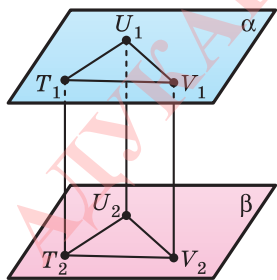


Рис. 266

483. Учитывая, что параллельные отрезки T_1T_2 , U_1U_2 и V_1V_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 266):

а) определите вид четырёхугольников $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ и $T_1V_1V_2T_2$;

б) докажите, что $\Delta T_1U_1V_1 = \Delta T_2U_2V_2$.

484. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках I_1 , J_1 и K_1 , а другую — в точках I_2 , J_2 и K_2 . Докажите, что треугольники $I_1J_1K_1$ и $I_2J_2K_2$ подобны.

485. Учитывая, что углы ATB , BTC , CTA и рёбра TA , TB , TC треугольной пирамиды $TABC$ соответственно равны 36° , 72° , 90° и 20, 18, 21, найдите:

- а) рёбра основания ABC данной пирамиды;
- б) площади всех боковых граней.

486. Учитывая, что через точку пересечения медиан грани JKL треугольной пирамиды $IJKL$ проведена плоскость, параллельная грани IJK :

- а) докажите, что сечение пирамиды этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику IJK ;
- б) найдите отношение площади сечения к площади треугольника IJK .

487. Начертите треугольную пирамиду $KLMN$ и:

- а) постройте её сечение плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN ;
- б) докажите, что плоскость, проходящая через середины E , O и F отрезков LM , MA и MK , параллельна плоскости LKA ;
- в) найдите площадь треугольника EOF , учитывая, что площадь треугольника LKA равна 24 см^2 .

488. Начертите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение:

- а) плоскостью ABC_1 ;
- б) плоскостью ACC_1 .

Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

489. Начертите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1 , а также общий отрезок этих сечений.

490. Начертите параллелепипед $IJKL I_1 J_1 K_1 L_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани $II_1 J_1 J$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно:

- а) плоскости основания $IJKL$;
- б) грани $JJ_1 K_1 K$;
- в) плоскости JLL_1 .

491. Начертите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через:

- а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани $AA_1 D_1 D$;
- б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости $AB_1 C_1$.

492. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через точки F_1 , H_1 и середину ребра GH . Докажите, что построенное сечение — трапеция.

493. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью FKL , где K — середина ребра EE_1 , а L — середина ребра GG_1 . Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

494. Начертите параллелепипед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK , где точки M , N и K лежат на рёбрах:

- а) PP_1 , OO_1 , OR ; б) QQ_1 , OR , PP_1 .

495. Учитывая, что точки I , J , K и L не лежат в одной плоскости, а медианы треугольников IJK и KJL пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2 :

- а) докажите, что отрезки IL и M_1M_2 параллельны;
б) найдите M_1M_2 , учитывая, что $IL = 12$ см.

496. Прямая a параллельна плоскости α . Определите, существуют ли плоскости, которые проходят через прямую a и параллельны плоскости α , и, если существуют, то сколько таких плоскостей.

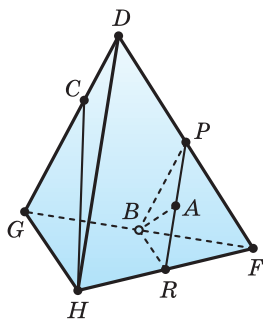
497. На рёбрах QA , QB и QC треугольной пирамиды $QABC$ отмечены такие точки M , N , P , что $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP , учитывая, что площадь треугольника ABC равна 18 см^2 и $QM : MA = 2 : 1$.

498. Начертите треугольную пирамиду $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB . Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точку M параллельно грани BDC .

499. Докажите, что в параллелепипеде $FGHIF_1G_1H_1I_1$ плоскость F_1IG параллельна плоскости I_1HG_1 .

500. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:

- а) треугольной пирамиды;
б) треугольной призмы;
в) четырёхугольной пирамиды;
г) параллелепипеда.



501. Учитывая, что точки B, P, R — середины рёбер FG, FD, FH пирамиды $DFGH$, отрезок AB — медиана треугольника BPR , а точка C принадлежит ребру DG (рис. 267):

а) докажите, что прямая AB параллельна плоскости DGH ;

б) определите, пересекается ли прямая HC с плоскостью BPR .

502. $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ — четырёхугольная призма. Докажите, что основания $MNKL$ и $M_1 N_1 K_1 L_1$ призмы ле-

жат в параллельных плоскостях.

503. Начертите параллелепипед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ и отметьте середину R ребра KK_1 . Постройте сечение параллелепипеда плоскостями $MM_1 K_1$ и MLR и отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

504. Учитывая, что диагонали NL и MK грани $KLMN$ параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пересекаются в точке Q , серединой ребра NN_1 является точка R , а четырёхугольник N_1ALB является сечением параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MRK и проходящей через точку N_1 (рис. 268):

а) установите, является ли параллелограммом четырёхугольник N_1ALB ;

б) докажите, что прямые RQ и N_1L параллельны.

505. Начертите параллелепипед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ и отметьте середины A и B рёбер NN_1 и LL_1 . Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MAK и проходящей через точку B . Постройте отрезок, по которому это сечение пересекает диагональное сечение $NLL_1 N_1$.

506. Учитывая, что четырёхугольник $EFGH$ — сечение параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскостью, парал-

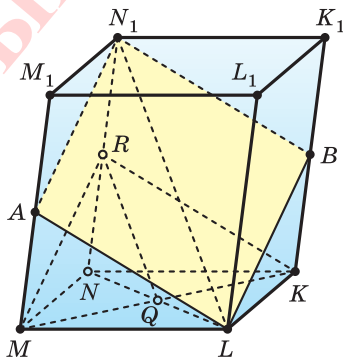


Рис. 268

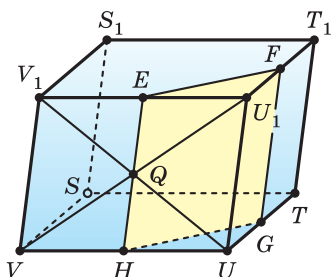


Рис. 269

лельной плоскости TVV_1 и проходящей через точку Q пересечения диагоналей грани UVV_1U_1 (рис. 269):

а) объясните, почему прямые FE и GH параллельны;

б) определите, параллельны ли прямые GF и HE ;

в) объясните, почему прямая SS_1 параллельна плоскости сечения.

507. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием $CDEF$, измерения которого равны 10 см, 10 см и 24 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости CFE_1 и проходящей через середину ребра CC_1 , и найдите его периметр.

508. Начертите параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MLK_1 и проходящей через точку пересечения диагоналей грани $KLMN$. Докажите, что прямая LN_1 параллельна плоскости сечения.

509. Учтявая, что четырёхугольник $LNAB$ — сечение параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскостью, проходящей через прямую LN и середину A ребра N_1K_1 (рис. 270), установите, является ли трапедией четырёхугольник $LNAB$.

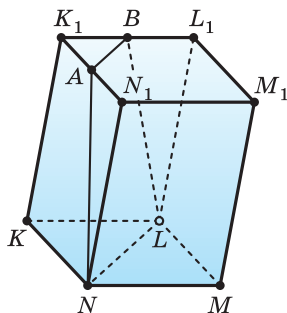


Рис. 270

510. Есть прямая четырёхугольная призма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, основанием которой является ромб со стороной 18 см и острым углом 60° . Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ C_1D_1 ромба и середину ребра AD . Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 40 см.

511. Все рёбра прямой призмы $BDFB_1D_1F_1$ равны друг другу. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что площадь сечения призмы плоскостью, про-

ходящей через вершины B , D и середину ребра FF_1 , равна S .

512. Учитывая, что треугольник PRQ — сечение правильной треугольной пирамиды $HEFG$ плоскостью, которая параллельна плоскости HFG и проходит через такую точку Q ребра FE , что $FQ : QE = 1 : 2$ (рис. 271):

а) докажите, что треугольники PRQ и GHF подобны;

б) найдите периметр треугольника PRQ , учитывая, что сторона основания пирамиды равна 30 см, а боковое ребро — 90 см.

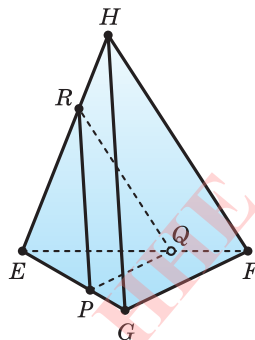


Рис. 271

513. Сечение треугольной пирамиды $TXYZ$, параллельное плоскости XYZ , делит боковое ребро в отношении $1 : 3$, если считать от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения, учитывая, что площадь треугольника XYZ равна q .

514. Сечение пирамиды, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении $2 : 3$, если считать от вершины пирамиды. Найдите площадь сечения, учитывая, что его площадь на 336 см^2 меньше площади основания.

515. Плоскость, которая параллельна плоскости HES и проходит через такую точку Q ребра SF правильной четырёхугольной пирамиды $SEFGH$, что $FQ : QS = 3 : 2$, пересекает пирамиду по четырёхугольнику $QPAB$ (рис. 272). Найдите периметр сечения, учитывая, что $EH = 30 \text{ см}$, $ES = 25 \text{ см}$.

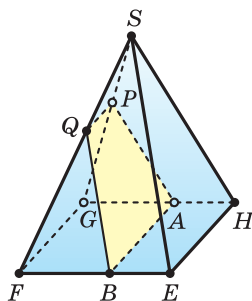


Рис. 272

516. Есть правильная четырёхугольная пирамида $FGHIJ$ с углом грани HFI при вершине F , равным 60° . Через некоторую точку Q ребра GJ проведено сечение плоскостью, параллельной грани FJI . Найдите периметр этого сечения, учитывая, что длина его диагонали равна 14 см, а $GQ = 6 \text{ см}$.

517. Точки X и A — соответственно середины рёбер MN и MP правильной треугольной пирамиды $PMNK$, а треугольники ARK и PXY — параллельные сечения, про-

ходящие через прямые KA и PX соответственно (рис. 273). Найдите площадь треугольника PXY , учитывая, что площадь треугольника ARK равна S .

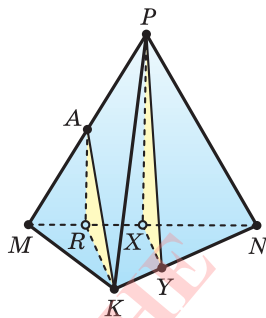


Рис. 273

518. Точки X , Y , Z — соответственно середины рёбер OK , MK , MN правильной треугольной пирамиды $OMNK$. Площадь сечения плоскостью, которая проходит через прямую MX и параллельна прямой NK , равна Q . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через точки Y и Z и параллельна прямой MX .

519. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды разделено на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площади полученных сечений, учитывая, что площадь основания равна S .

520. Точка M делит боковое ребро CX треугольной пирамиды $CXYZ$ в отношении $2 : 3$, если считать от вершины пирамиды. Треугольник MBP — сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости XYZ и проходящей через точку M . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $СMBP$, учитывая, что площадь боковой поверхности пирамиды $CXYZ$ равна q .

521. Площадь сечения пирамиды плоскостью α , параллельной основанию и проходящей через точку на боковом ребре, равна 5 см^2 . Определите, в каком отношении плоскость α делит боковое ребро пирамиды, учитывая, что площадь основания равна 80 см^2 .

522. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды соответственно равны m и n . Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1 : 3$, если считать от вершины пирамиды, проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите его площадь.

523. На ребре M_1L_1 прямоугольного параллелепипеда $MNKL M_1N_1K_1L_1$ выбрана такая точка Q , что $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости MN_1K и проходящей через точку Q ,

и найдите его площадь, учитывая, что площадь треугольника MN_1K равна 200 см^2 .

524. На рёбрах N_1K_1 , LK , MM_1 параллелепипеда $MNKL M_1N_1K_1L_1$ выбраны точки Q , T , R соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QTR .

525. Точки Q , B и R — соответственно середины рёбер SY , XX_1 и S_1T_1 параллелепипеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QBR .

526. Найдите производную функции:

а) $y = s^4 + 4s^3 - s^2 + 2s - 5$; в) $y = s^7 - \frac{1}{s^7}$;

б) $y = \frac{s^5 + 2s^3 - 2s + 5}{s}$; г) $y = \frac{s^2 + 1}{s^{10}}$.

527. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 3x^2 - 4x - 7$; в) $y = x^4 - 8x^2 + 6$;

б) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$; г) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

528. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$;

б) $\frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1 + \sin \alpha$;

в) $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$;

г) $\sin^2 \alpha (3 - \operatorname{ctg} \alpha)(3 \operatorname{ctg} \alpha - 1) = 10 \sin \alpha \cos \alpha - 3$.

529. Найдите значение выражения:

а) $\cos 54^\circ \cos 36^\circ - \sin 54^\circ \sin 36^\circ$;

б) $\sin 124^\circ \cos 34^\circ - \cos 124^\circ \sin 34^\circ$;

в) $\cos 115^\circ \cos 65^\circ - \sin 115^\circ \sin 65^\circ$;

г) $\sin 107^\circ \cos 118^\circ + \cos 62^\circ \sin 73^\circ$.

530. Найдите приближенное значение функции f в точках x_1 и x_2 , учитывая, что:

а) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$, $x_1 = 0,98$, $x_2 = -1,02$;

б) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_1 = 1,0018$, $x_2 = -0,998$.

531. На графике функции $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ найдите точку, в которой касательная:

- а) параллельна прямой $y = x + 3$;
- б) перпендикулярна прямой $y = 3x - 1$.

532. Найдите касательную к графику функции $y = x^2 - 2x - 2$, которая проходит через точку:

- а) $(-1; 1)$; б) $(2; 2)$; в) $(-2; 1)$.

533. Докажите тождество:

- а) $\cos(\alpha + 90^\circ) \cos \beta + \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) = 0$;
- б) $\cos(90^\circ - \alpha) \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha = 1$.

534. Может ли косинус быть равным:

- а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{a^2+1}{2a}$; в) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; г) $\frac{2uv}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}$?

535. Когда собрали урожай с двух полей площадью 27 га и 36 га, то средняя урожайность оказалась равной 42 ц/га. Найдите урожайность на каждом поле, учитывая, что зерно, собранное с первого поля, составляет $\frac{19}{30}$ зерна, собранного со второго поля.

536. Когда в два треугольника, площади которых относятся как $17 : 100$, вписали окружности, то их радиусы оказались равными 2 см и 4 см (рис. 274). Найдите периметры треугольников, учитывая, что когда около окружности с радиусом 6 см описали треугольник с площадью, равной сумме площадей первого и второго треугольников, то его периметр оказался равным 39 см.

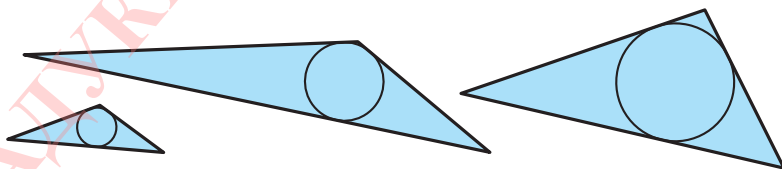


Рис. 274

537. Когда около двух окружностей описали треугольники, площади которых относятся как $1 : 5$, то их периметры оказались равными 26 см и 52 см (рис. 275). Найдите радиусы окружностей, учитывая, что когда в третий

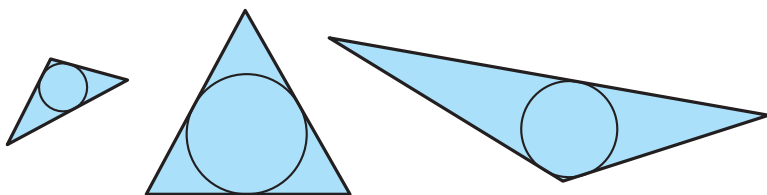


Рис. 275

треугольник, площадь и периметр которого соответственно равны сумме площадей и сумме периметров первого и второго треугольников, вписали окружность, то её радиус оказался равным 4 см.

* * *

538. Попарно различные числа a , b , c удовлетворяют условиям $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.

Чему может быть равно произведение abc ?

539. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ со стороной 1 выбраны такие точки M и N , что периметр треугольника AMN равен 2. Найдите угол MCN .

540. У пятизначных чисел, цифры которых идут по убыванию, находят сумму цифр. Определите, каких чисел больше: тех, у которых сумма цифр равна 30, или тех, у которых эта сумма равна 31.



Тригонометрические выражения

11. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольных углового и числового аргументов

Вы уже изучали синус, косинус, тангенс и котангенс углового аргумента, который изменялся в пределах от 0° до 180° . Теперь введём тригонометрические функции произвольного углового аргумента.

Пусть центр единичной окружности совпадает с началом координат (рис. 276) и её точка $M_0(1; 0)$ при повороте на угол α отобразилась в точку $M_\alpha(x; y)$.

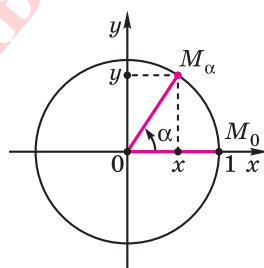


Рис. 276

Синусом угла α называется ордината y точки $M_\alpha(x; y)$, полученной поворотом точки $M_0(1; 0)$ на угол α .

Косинусом угла α называется абсцисса x точки $M_\alpha(x; y)$, полученной поворотом точки $M_0(1; 0)$ на угол α .

Синус и косинус угла α обозначаются соответственно $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

В этих определениях угол α может быть выражен как в градусной, так и радианной мерах.

Отметим, что данные определения синуса и косинуса для значений угла из промежутка от 0° до 180° совпадают с определениями, которые вам известны из VIII класса.

Например,

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 180^\circ = \cos \pi = -1.$$

Пример 1. Найдём $\sin(-90^\circ)$ и $\cos(-90^\circ)$.

Как показывает рисунок 277, точка $(1; 0)$ при повороте на угол величиной -90° отображается на точку $(0; -1)$. Поэтому $\sin(-90^\circ) = -1$ и $\cos(-90^\circ) = 0$.

Пример 2. Найдём $\sin \frac{3\pi}{2}$ и $\cos \frac{3\pi}{2}$.

Из рисунка 278 видно, что точка $(1; 0)$ при повороте на угол величиной $\frac{3\pi}{2}$ отображается на точку $(0; -1)$. Поэтому $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ и $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

Пример 3. Найдём $\sin(-495^\circ)$ и $\cos(-495^\circ)$.

Как показывает рисунок 279, точка $(1; 0)$ при повороте на угол 495° по часовой стрелке через 360° вернётся в исходное положение, а затем ещё повернётся на 135° и в результате отобразится на точку $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Поэтому

$$\sin(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

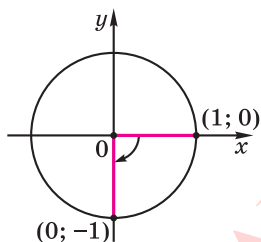


Рис. 277

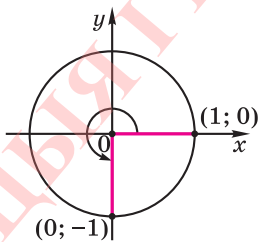


Рис. 278

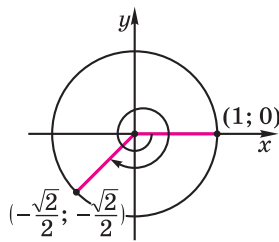


Рис. 279

Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к его косинусу.

Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к его синусу.

Тангенс и котангенс угла α обозначаются соответственно $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Теперь введём синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Это желание объясняется тем, что одна зависимость может описывать различные процессы, в которых переменные могут иметь самый разный смысл. Например, формула $y = ax^2$ может иметь самые разные интерпретации, в том числе выражать зависимость:

$S = a^2$ площади S квадрата от его стороны a ;

$h = \frac{g}{2} t^2$ пройденного телом пути h от времени t при свободном падении с ускорением g ;

$a = \frac{1}{R} v^2$ линейного ускорения a от скорости v при движении тела по окружности с радиусом R ;

$K = \frac{m}{2} v^2$ кинетической энергии K тела массой m от его скорости v ;

$Q = R t I^2$ количества Q теплоты, выделившейся в проводнике сопротивлением R за время t , от силы тока I .

В этих зависимостях переменная x в формуле $y = ax^2$ интерпретируется как длина a , время t , скорость v , сила тока I . Можно ожидать, что и переменная x под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса также может иметь интерпретации, отличные от градусной меры угла. Действительно, зависимость смещения x тела от положения равновесия при его колебательном движении от времени t передаётся формулой $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где A , ω_0 и φ — постоянные для данного движения величины (рис. 280).

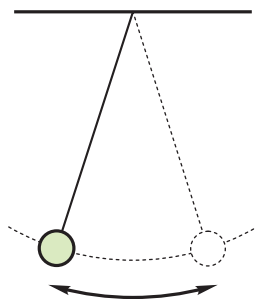


Рис. 280

Синусом числа t называется синус угла в t радиан.

Косинусом числа t называется косинус угла в t радиан.

Тангенсом числа t называется отношение синуса этого числа к его косинусу.

Котангенсом числа t называется отношение косинуса этого числа к его синусу.

Составим таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса для наиболее употребительных чисел в пределах от 0 до 2π (рис. 281).

Наконец, точки $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$ симметричны соответственно точкам $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ относительно начала координат, и поэтому их ординаты и абсциссы отличаются только знаком. Значит,

$$\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

В результате получается следующая таблица.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не суще- ствует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} t$	Не суще- ствует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не суще- ствует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} t$	Не суще- ствует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не суще- ствует

Составленная таблица подсказывает, что синус, косинус, тангенс и котангенс могут быть разными по знаку. Этот знак зависит от координатной четверти, в которой находится точка единичной окружности.

Если точка находится в первой четверти, то её ордината и абсцисса обе положительны (рис. 282). Поэтому синус и косинус соответствующего действительного числа t также положительны.

Если точка находится во второй четверти, то её ордината положительна, а абсцисса отрицательна (рис. 283). Поэтому синус соответствующего числа t положителен, а косинус отрицателен.

Если точка находится в третьей четверти, то её ордината и абсцисса обе отрицательны (рис. 284). Поэтому синус и косинус соответствующего числа t отрицательны.

Если точка находится в четвёртой четверти, то её ордината отрицательна, а абсцисса положительна (рис. 285). Поэтому синус соответствующего числа t отрицателен, а косинус положителен.

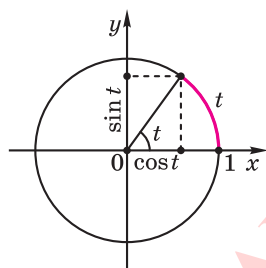


Рис. 282

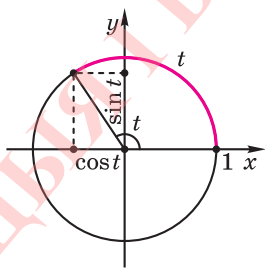


Рис. 283

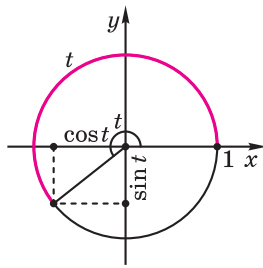


Рис. 284

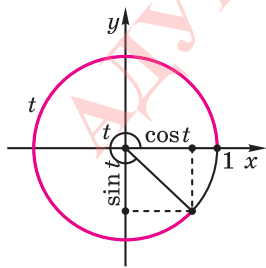


Рис. 285

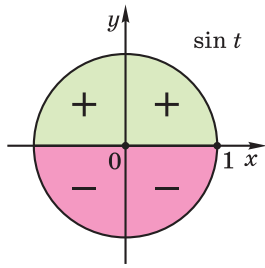


Рис. 286

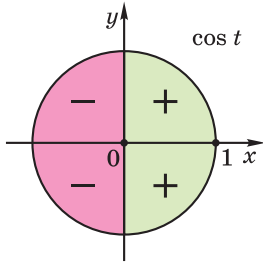


Рис. 287

Результаты этого исследования изображены на рисунках 286 и 287 для синуса и для косинуса соответственно. Учитывая это и определения тангенса и котангенса, получаем распределение их знаков, изображённое на рисунках 288 и 289 соответственно.

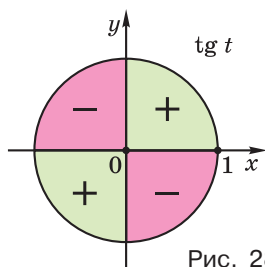


Рис. 288

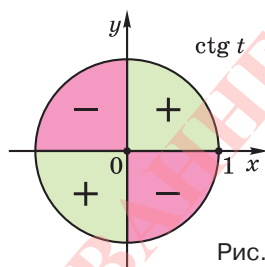


Рис. 289

Пример 4. Найдём знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

а) угла 1024° ;

б) числа -10 .

а) Точка $(1; 0)$, сделав два оборота против часовой стрелки, т. е. сделав поворот на угол 720° , вернётся в начальное положение. После этого ещё останется сделать поворот на $1024^\circ - 720^\circ$, т. е. на 304° . В результате точка окажется в четвёртой четверти (рис. 290). Значит,

$$\begin{aligned}\sin 1024^\circ &< 0, \cos 1024^\circ > 0, \\ \operatorname{tg} 1024^\circ &< 0, \operatorname{ctg} 1024^\circ < 0.\end{aligned}$$

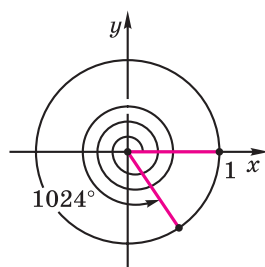


Рис. 290

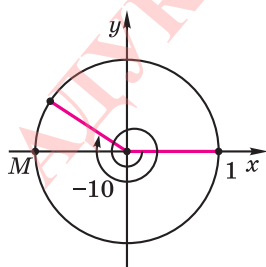


Рис. 291

б) Точка $(1; 0)$, сделав полтора оборота по часовой стрелке, повернётся на угол $-9,4247\dots$ радиан и попадёт в точку $M(-1; 0)$ (рис. 291). После этого ещё останется сделать поворот на $-10 - (-9,4247\dots)$, т. е. на угол, равный $-0,5752\dots$. В результате точка окажется во второй четверти. Значит,

$$\begin{aligned}\sin(-10) &> 0, \cos(-10) < 0, \\ \operatorname{tg}(-10) &< 0, \operatorname{ctg}(-10) < 0.\end{aligned}$$

Теорема 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс чисел t и $-t$ связаны равенствами:

$$\sin(-t) = -\sin t; \cos(-t) = \cos t;$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Доказательство. Пусть t — определённое действительное число и пусть точка $M_1(x_1; y_1)$ единичной окружности получена поворотом точки $M_0(1; 0)$ на угол t радиан, а точка $M_2(x_2; y_2)$ — на угол $-t$ радиан (рис. 292). Тогда эти точки симметричны относительно оси абсцисс, а поэтому их абсциссы совпадают, а ординаты отличаются только знаком: $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$. Но $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $x_2 = \cos(-t)$, $y_2 = \sin(-t)$. Значит,

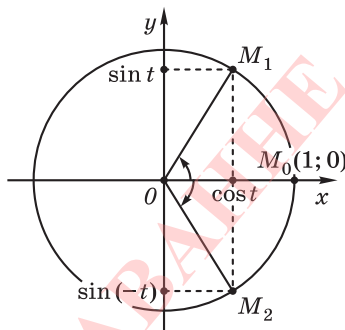


Рис. 292

$$\cos(-t) = \cos t, \sin(-t) = -\sin t.$$

Теперь, используя определения тангенса и котангенса, получаем:

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Пример 5. Найдём значение выражения:

а) $\cos(-135^\circ)$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Будем иметь:

а) $\cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс одного аргумента связаны друг с другом.

Теорема 2. Синус, косинус, тангенс и котангенс одного числа t связаны равенствами:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}; \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1;$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1; 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Доказательство. Первое и второе равенства являются определениями. Из них следует, что

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

Пусть t — действительное число и пусть точка $M_t(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $M_0(1; 0)$ на угол в t радиан (рис. 293). Тогда по определениям синуса и косинуса можем записать:

$$y = \sin t, \quad x = \cos t. \quad (1)$$

Точка $M_t(x; y)$ — точка единичной окружности, поэтому её координаты x и y удовлетворяют уравнению этой окружности:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Учитывая равенства (1), получаем:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Четвёртое равенство доказано.

Докажем пятое равенство. Для этого обе части равенства $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ разделим на $\cos^2 t$:

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \text{или} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Подобным образом доказывается и шестое равенство.

Доказанные равенства являются тождествами, т. е. они истинны при всех значениях переменных, при которых обе их части имеют значения. Так, например, первое равенство истинно при тех значениях переменной t , при которых $\cos t \neq 0$, а четвёртое — при всех значениях t .

Пример 6. Пусть $\sin t = -\frac{7}{25}$ и $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найдём значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Используя формулу $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, найдём, что $|\cos t| = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right)} = \sqrt{\frac{18 \cdot 32}{25 \cdot 25}} = \frac{24}{25}$. Поскольку число t таково, что соответствующий ему угол

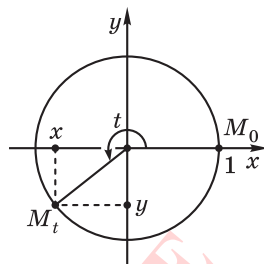


Рис. 293

оканчивается в третьей четверти, в которой косинус отрицательный, то $\cos t = -\frac{24}{25}$.

$$\text{Поскольку } \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \text{ то } \operatorname{tg} t = \left(-\frac{7}{25}\right) : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}.$$

$$\text{Поскольку } \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \text{ то } \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 1 : \frac{7}{24} = 3\frac{3}{7}.$$



1. Что называют синусом угла; косинусом угла; тангенсом угла; котангенсом угла?
2. Что называют синусом числа; косинусом числа; тангенсом числа; котангенсом числа?
3. Чему равны синус, косинус, тангенс, котангенс чисел $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$?
4. Как по координатным четвертям изменяется знак синуса, косинуса, тангенса, котангенса?
5. Запишите тождества, связывающие синус, косинус, тангенс и котангенс чисел t и $-t$.
6. Запишите тождества, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного числа.

541. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) 90° ; в) 180° ; д) 450° ; ж) 900° ;
б) -90° ; г) -180° ; е) -450° ; з) -900° .

542. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) π ; в) $\frac{3\pi}{2}$; д) 2π ; ж) $\frac{27\pi}{2}$;
б) $-\pi$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; е) -2π ; з) $-\frac{69\pi}{2}$.

543. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) 240° ; в) 840° ; д) 1215° ; ж) 1780° ;
б) -240° ; г) -840° ; е) -1215° ; з) -1780° .

544. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{7\pi}{3}$; д) $\frac{33\pi}{4}$; ж) $\frac{43\pi}{6}$;
б) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$; е) $-\frac{33\pi}{4}$; з) $-\frac{43\pi}{6}$.

545. На единичной окружности отметьте точку, полученную из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) 45° ; в) 210° ; д) 495° ; ж) 1050° ;
б) -45° ; г) -210° ; е) -495° ; з) -1050° .

546. На единичной окружности отметьте точку, полученную из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{10\pi}{6}$; д) $\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{25\pi}{6}$;
б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{10\pi}{6}$; е) $-\frac{21\pi}{4}$; з) $-\frac{25\pi}{6}$.

547. Укажите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) 321° ; в) 520° ; д) 762° ; ж) 1647° ;
б) -321° ; г) -520° ; е) -762° ; з) -1647° .

548. Укажите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{15\pi}{7}$; д) $\frac{37\pi}{8}$; ж) $\frac{91\pi}{12}$;
б) $-\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{15\pi}{7}$; е) $-\frac{37\pi}{8}$; з) $-\frac{91\pi}{12}$.

549. Определите четверть, в которой расположена точка, полученная из точки $(1; 0)$ поворотом на угол, равный:

- а) 1; в) 2,87; д) 5,12; ж) 27,4;
б) -2; г) -3,16; е) -6,31; з) -33,9.

550. Определите знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, учитывая, что значение переменной x равно:

- а) 234° ; в) 753° ; д) 7941° ;
б) -234° ; г) -753° ; е) $-17\,941^\circ$.

551. Определите знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, учитывая, что значение переменной x равно:

- а) $\frac{4\pi}{5}$; в) $4\frac{2}{25}\pi$; д) 5,59; ж) 7,9;
б) $-1\frac{7}{20}\pi$; г) $-4\frac{2}{25}\pi$; е) -5,59; з) -7,9.

552. Определите, какой знак имеет выражение:

- а) $\sin 201^\circ \cdot \sin 299^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 145^\circ \cdot \operatorname{ctg} 297^\circ$;
в) $\sin 195^\circ \cdot \operatorname{tg} (-203^\circ)$;
г) $\cos (-243^\circ) \cdot \sin 111^\circ$;
д) $\cos 43^\circ \cdot \sin 121^\circ \cdot \operatorname{tg} 149^\circ$;

- е) $\sin 196^\circ \cdot \cos 916^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1276^\circ$;
 ж) $\operatorname{tg} 96^\circ \cdot \operatorname{ctg} (-196^\circ) \cdot \cos (-296^\circ)$;
 з) $\sin (-1000^\circ) \cdot \cos 835^\circ \cdot \operatorname{tg} (-380^\circ)$.

553. Определите, какой знак имеет выражение:

- а) $\cos 1,1\pi \cdot \cos 1,7\pi$;
 б) $\cos 1,08\pi \cdot \operatorname{tg} 1,13\pi$;
 в) $\sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;
 г) $\operatorname{tg} \left(-\frac{4\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{33\pi}{20}$;
 д) $\sin 0,4\pi \cdot \cos \frac{13\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$;
 е) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{20} \cdot \operatorname{ctg} \frac{29\pi}{25} \cdot \sin 2,74\pi$;
 ж) $\cos \frac{111\pi}{20} \cdot \sin \left(-\frac{116\pi}{25}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{21\pi}{10}\right)$;
 з) $\cos \left(-\frac{27\pi}{25}\right) \cdot \sin 5,09\pi \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{177\pi}{25}\right)$.

554. Найдите значение синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла, равного:

- а) -30° ; г) -315° ; ж) -90° ; к) -240° .
 б) -300° ; д) -60° ; з) -270° ;
 в) -45° ; е) -360° ; и) -120° ;

555. Найдите значение синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла, равного:

- а) $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{4\pi}{3}$; ж) $-\frac{11\pi}{6}$; и) $-\frac{7\pi}{4}$;
 б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{5\pi}{6}$; е) $-\frac{5\pi}{3}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.

556. Найдите значение выражения:

- а) $\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}$; д) $\sin \pi - \cos \pi$;
 б) $\sin 2\pi + \cos 0$; е) $\cos 0 + \cos \frac{3\pi}{2}$;
 в) $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$; ж) $\sin \pi : \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)$;
 г) $\sin \pi + \sin 1,5\pi$; з) $\cos 0 : \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

557. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg} \pi$;

б) $\operatorname{tg} 2\pi : \cos 2\pi$;

е) $\cos \pi \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \pi$;

ж) $\sin \pi : \operatorname{ctg} \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} - \sin 0,5\pi$;

з) $\operatorname{tg} \pi - \sin \frac{\pi}{2}$.

558. Найдите значение выражения:

а) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2 \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

б) $\cos^{11}(-\pi) \operatorname{ctg}^7 \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^5 \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2 \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

в) $\left(3 - \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) : 2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{ctg}^5 \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \frac{7}{12} \operatorname{tg}^7(-\pi) + 14 \cos^{12} \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

559. Непосредственной проверкой докажите истинность равенства:

а) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$;

г) $\sin^2 \frac{7\pi}{4} + \cos^2 \frac{7\pi}{4} = 1$;

б) $\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1$;

д) $\sin^2 \frac{8\pi}{3} + \cos^2 \frac{8\pi}{3} = 1$;

в) $\sin^2 \frac{7\pi}{6} + \cos^2 \frac{7\pi}{6} = 1$;

е) $\sin^2 \frac{17\pi}{6} + \cos^2 \frac{17\pi}{6} = 1$.

560. Найдите значение выражения:

а) $4 \sin \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

б) $7 \sin \frac{\pi}{6} + 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} - 11 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$;

г) $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} : \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

д) $\left(2 \sin \frac{\pi}{6} - 4 \cos \frac{\pi}{3}\right)^3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$;

е) $\sin 0,5\pi : \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2\pi : \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

561. На единичной окружности изобразите точки, соответствующие углам, которые удовлетворяют равенству:

а) $\sin \beta = \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg} \delta = \sqrt{3}$; ж) $\operatorname{tg} \tau = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; д) $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\operatorname{ctg} \varepsilon = -\sqrt{3}$.

в) $\operatorname{tg} \gamma = 1$; е) $\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

562. На единичной окружности изобразите точки, соответствующие углам, которые удовлетворяют равенству:

а) $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} \delta = -1$; ж) $\operatorname{tg} \tau = -\sqrt{3}$;

б) $\cos \alpha = -1$; д) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\operatorname{ctg} \varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

в) $\operatorname{tg} \gamma = 0$; е) $\cos \omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

563. Учитывая, что $\sin x = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, найдите:

а) $\cos x$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{ctg} x$.

564. Учитывая, что $\cos z = \frac{9}{41}$ и $\frac{3\pi}{2} < z < 2\pi$, найдите:

а) $\sin z$; б) $\operatorname{tg} z$; в) $\operatorname{ctg} z$.

565. Учитывая, что $\operatorname{tg} a = \frac{7}{24}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, найдите:

а) $\operatorname{ctg} a$; б) $\cos a$; в) $\sin a$.

566. Учитывая, что $\operatorname{ctg} y = \frac{61}{60}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$, найдите:

а) $\operatorname{tg} y$; б) $\sin y$; в) $\cos y$.

567. Найдите значения $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, учитывая, что

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ и:

а) $\sin x = \frac{15}{17}$; в) $\sin x = -\frac{11}{61}$;

б) $\sin x = \frac{21}{29}$; г) $\sin x = -\frac{65}{97}$.

568. Найдите значения $\sin c$, $\operatorname{tg} c$, $\operatorname{ctg} c$, учитывая, что $\pi < c < 2\pi$ и:

а) $\cos c = \frac{3}{5}$; в) $\cos c = -\frac{28}{53}$;

б) $\cos c = \frac{5}{13}$; г) $\cos c = -\frac{24}{143}$.

569. Найдите значения $\operatorname{ctg} d$, $\cos d$, $\sin d$, учитывая, что $3\pi < d < 4\pi$ и:

а) $\operatorname{tg} d = \frac{40}{41}$;

в) $\operatorname{tg} d = -\frac{56}{65}$;

б) $\operatorname{tg} d = 1\frac{1}{21}$;

г) $\operatorname{tg} d = -\frac{105}{137}$.

570. Найдите значения $\operatorname{tg} z$, $\sin z$, $\cos z$, учитывая, что $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$ и:

а) $\operatorname{ctg} z = 1\frac{2}{15}$;

в) $\operatorname{ctg} z = -\frac{63}{65}$;

б) $\operatorname{ctg} z = \frac{55}{73}$;

г) $\operatorname{ctg} z = -\frac{195}{197}$.

571. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2 x$;

б) $\sin^4 y - \cos^4 y + \cos^2 y$;

в) $\sin^4 z + \cos^4 z + 2\sin^2 z \cos^2 z$;

г) $(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2$;

д) $\sin^2 u + \cos^2 u + \cos^2 u \cdot \sin^2 u$;

е) $\sin^4 v - \cos^4 v + \cos^2 v - \sin^2 v$.

572. Упростите выражение:

а) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;

в) $\frac{\sin^3 \delta + \cos^3 \delta}{\sin \delta \cdot \cos \delta - 1}$;

б) $\frac{2\cos^2 \beta - 1}{1 - 2\sin^2 \beta}$;

г) $\frac{\sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi + 1}$.

573. Упростите выражение:

а) $\cos x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$;

г) $\sin^2 u \cdot \operatorname{ctg}^2 u - \sin^2 u + 1$;

б) $\sin^2 y + \operatorname{tg}^2 y - \frac{1}{\cos^2 y}$;

д) $\cos^2 v \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 v)$;

в) $\operatorname{tg}^2 z + \sin^2 z + \cos^2 z$;

е) $\frac{\operatorname{tg}^4 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 2$.

574. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}^3 \beta + \operatorname{ctg}^3 \beta}{(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2 + 1}$.

б) $\frac{\cos^2 \delta - \operatorname{ctg}^2 \delta}{\sin^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \delta}$;

575. Докажите тождество:

а) $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a$;

б) $\sin^2 b - \cos^2 c = \cos^2 c - \cos^2 b$;

$$в) \operatorname{ctg}^2 d \cdot \cos^2 d = \operatorname{ctg}^2 d - \cos^2 d;$$

$$г) \frac{1 + \cos b}{\sin b} = \frac{\sin b}{1 - \cos b};$$

$$д) \frac{1 - 2\sin^2 t}{2\cos^2 t - 1} = 1;$$

$$е) \frac{\operatorname{tg}^2 g - 1}{\operatorname{tg} g} + \frac{(\operatorname{tg}^2 g - 1)(\operatorname{tg}^4 g + 1)}{\operatorname{tg}^3 g} = \operatorname{tg}^3 g - \operatorname{ctg}^3 g.$$

576. Докажите тождество:

$$а) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$б) \frac{2\sin^2 \beta - 1}{1 - 2\cos^2 \beta} - \frac{\cos^2 \beta - 1}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta};$$

$$в) \frac{1 + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg}^2 \gamma} = \operatorname{tg}^2 \gamma;$$

$$г) \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$д) \frac{1 - 4\sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta}{(\sin \delta - \cos \delta)^2} = 1 - 2\sin \delta \cos \delta;$$

$$е) \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi.$$

577. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его углов равна:

- а) 1080° ; б) 1440° ; в) 1980° ; г) 3420° ?

578. Длина ломаной $ABKLDA$, образованной рёбрами AB , AD , DL , LK куба и диагональю BK его боковой грани (рис. 294), равна 16 см. Найдите поверхность куба.

579. У треугольной пирамиды $QKLM$, все грани которой — правильные треугольники, проведены средние линии AB и BC граней QLM и QLK (рис. 295). Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина

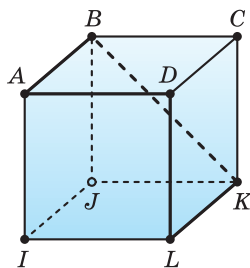


Рис. 294

пространственной ломаной $ABCLMA$ равна 27 см.

580. Произведение диагоналей ромба, который является основанием прямого параллелепипеда, равно 192 см^2 , радиус вписанной в него окружности — 4,8 см, а диагональ боковой грани — 26 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

581. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и её боковое ребро соответственно равны k и l . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

582. Найдите полную поверхность прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 5 см, $\sqrt{41}$ см и $\sqrt{34}$ см.

583. Точка B делит отрезок AC пополам. Определите радиус окружности, которая касается окружностей, построенных на отрезках AB , BC и AC как на диаметрах, учитывая, что $AB = a$.

584. В треугольник со сторонами 7, 8 и 13 вписана окружность. Ещё одна окружность касается её и двух меньших сторон треугольника. Определите радиус этой окружности.

585. Учитывая, что S — площадь треугольника со сторонами a , b и c , p — полупериметр, r — радиус вписанной в треугольник окружности, r_a , r_b , r_c — радиусы невписанных окружностей, которые касаются соответствующих сторон (рис. 296), докажите равенства

$$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

586. С двух участков вместе собрали 590 ц ячменя, при этом урожайность на первом из них составила 26 ц/га, а площадь второго равна 12 га. Найдите урожайность на втором участке, учитывая, что средняя урожайность на обоих участках оказалась равной 23,6 ц/га.

587. Велосипедист ехал сначала со скоростью 16 км/ч, а затем снизил её до 12 км/ч и с меньшей скоростью проехал на 19 км меньше. Найдите путь, который проехал ве-

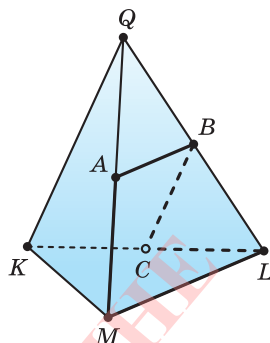


Рис. 295

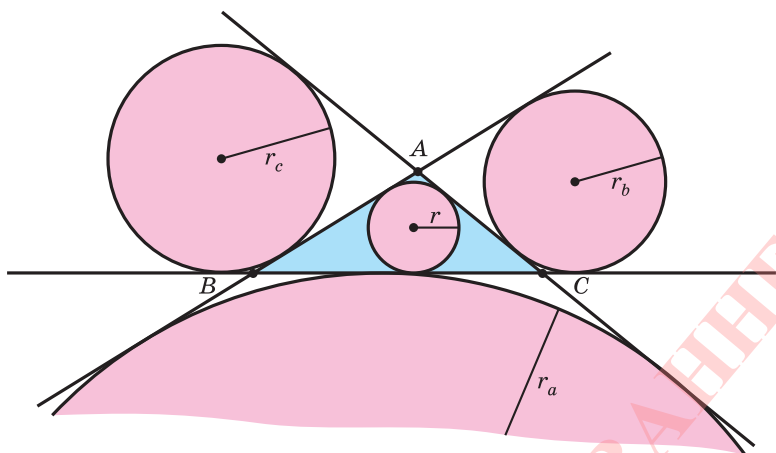


Рис. 296

лосипедист, учитывая, что средняя скорость на всём пути оказалась равной $14,8$ км/ч.

588. Есть два прямоугольных параллелепипеда. У одного площадь основания равна 28 м^2 , у второго — 58 м^2 и объём второго на 268 м^3 больше (рис. 297). Найдите объёмы параллелепипедов, учитывая, что третий параллелепипед с объёмом, равным суммарному объёму первого и второго параллелепипедов, и высотой, равной сумме их высот, имеет площадь основания 44 м^2 .

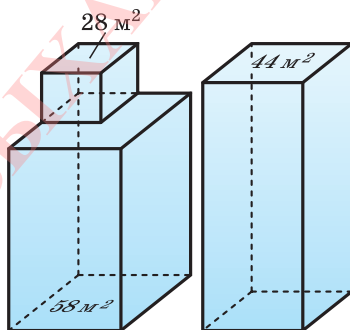


Рис. 297

589. Найдите площадь треугольника ABC , учитывая, что его медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL и $AM = m$, $BL = l$.

590. Возрастающая последовательность $a(n)$ принимает натуральные значения и при всех натуральных значениях k удовлетворяет условию $a(a(k)) = 3k$. Найдите $a(2008)$.

591. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек. Прямая, проходящая через точку O_1 и касающаяся второй окружности, пересекает первую в точках A и A_1 , а прямая, проходящая через точку O_2 и каса-

ющаяся первой окружности, пересекает вторую в точках B и B_1 (рис. 298). Учитывая, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, точки A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 и отрезки AB и A_1B_1 соответственно равны m и n , найдите длину отрезка O_1O_2 .

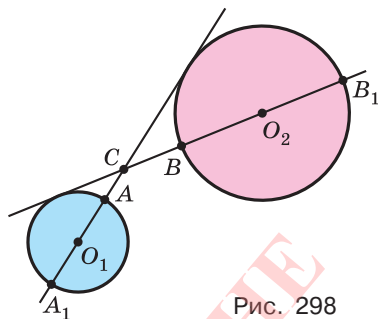


Рис. 298

12. Формулы сложения. Формулы приведения

Синус, косинус, тангенс и котангенс связаны между собой многими соотношениями. Некоторые из них вы уже знаете. Это соотношения, связывающие значения выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, значения тригонометрических выражений для чисел $-t$ и t .

Установим теперь группу соотношений, которые следуют из свойств поворотов. Поворот точки на угол $u + v$ можно рассматривать как композицию (последовательное выполнение) поворота на угол u и поворота на угол v .

Теорема 3. Для любых действительных чисел u и v истинны равенства:

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Доказательство. Пусть u и v — действительные числа и пусть точки M_1 , M_2 , M_3 единичной окружности получены поворотом точки $M_0(1; 0)$ на углы u , $u + v$, $-v$ радиан соответственно (рис. 299). Тогда по определениям косинуса и синуса координаты этих точек следующие:

$$M_1(\cos u, \sin u), \quad M_2(\cos(u + v), \sin(u + v)), \\ M_3(\cos(-v), \sin(-v)).$$

Поскольку поворот на угол $u + v$ радиан есть композиция поворотов на угол u радиан и угол v радиан, то угол

M_1OM_2 равен v радиан, и, значит, углы M_1OM_2 и M_3OM_0 равны друг другу. Если к этим углам прибавить по углу M_0OM_1 , то получатся также равные углы M_0OM_2 и M_3OM_1 . Учитывая, что прилежащие к этим углам стороны треугольников M_0OM_2 и M_3OM_1 являются радиусами одной окружности, можем утверждать, что треугольники M_0OM_2 и M_3OM_1 равны. Поэтому равны их соответствующие стороны M_0M_2 и M_3M_1 и, значит,

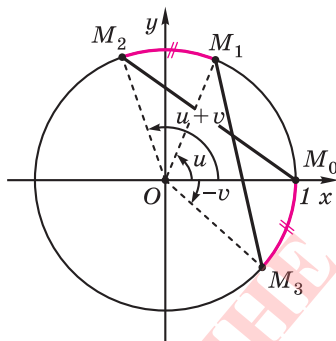


Рис. 299

$$M_0M_2^2 = M_3M_1^2.$$

Но по формуле расстояния между точками получаем:

$$M_0M_2^2 = (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2;$$

$$M_3M_1^2 = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 = \\ & = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2. \end{aligned}$$

Преобразуем это равенство:

$$\begin{aligned} & (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 = \\ & = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2 \stackrel{(1)}{=} \\ & \equiv (\cos(u+v) - 1)^2 + \sin^2(u+v) = (\cos u - \cos v)^2 + \\ & + (\sin u + \sin v)^2 \stackrel{(2)}{=} \cos^2(u+v) + 1 - 2\cos(u+v) + \\ & + \sin^2(u+v) = \cos^2 u + \cos^2 v - 2\cos u \cos v + \\ & + \sin^2 u + \sin^2 v + 2\sin u \sin v \stackrel{(3)}{=} (\cos^2(u+v) + \\ & + \sin^2(u+v)) + 1 - 2\cos(u+v) = (\cos^2 u + \sin^2 u) + \\ & + (\cos^2 v + \sin^2 v) - 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \stackrel{(4)}{=} \\ & \equiv 1 + 1 - 2\cos(u+v) = 1 + 1 - 2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv 2 - 2\cos(u+v) = 2 - 2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv -2\cos(u+v) = -2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались: (1) — тождествами, установленными теоремой 1; (2) — формулами квадрата суммы и разности двух выражений; (3) — группировкой слагаемых алгебраической суммы; (4) — тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Первое равенство доказано. Чтобы установить второе равенство, заменим в первом равенстве выражение v выражением $-v$:

$$\begin{aligned}\cos(u - v) &= \cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v) \equiv \\ &\equiv \cos(u - v) = \cos u \cos v - \sin u (-\sin v) \equiv \\ &\equiv \cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.\end{aligned}$$

Прежде чем доказывать третье равенство, установим равенства:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Используя вторую формулу, получаем:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t \equiv \\ &\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.\end{aligned}$$

В доказанной формуле $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ выражение t заменим выражением $\frac{\pi}{2} - t$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Теперь докажем третью формулу:

$$\begin{aligned}\sin(u + v) &\stackrel{(1)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right) \stackrel{(2)}{=} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\sin v \stackrel{(4)}{=} \sin u \cos v + \cos u \sin v.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали: (1) — формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ при её прочтении справа налево; (2) — перегруппировку членов алгебраической суммы; (3) — доказанную формулу косинуса разности; (4) — формулы $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

Чтобы получить четвёртую формулу, в третьей формуле заменим выражение v выражением $-v$:

$$\begin{aligned}\sin(u - v) &= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v) \equiv \\ &\equiv \sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.\end{aligned}$$

Следствие. Равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(u + v) &= \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}; & \operatorname{tg}(u - v) &= \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}; \\ \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v &= \frac{\sin(u + v)}{\cos u \cdot \cos v}; & \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v &= \frac{\sin(u - v)}{\cos u \cdot \cos v}.\end{aligned}$$

являются тождествами.

Нужно убедиться, что записанные равенства истинны при всех значениях переменных, при которых обе их части имеют значения.

Первую формулу можно получить, если использовать определение тангенса и доказанные формулы для $\sin(u + v)$ и $\cos(u + v)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(u + v) &= \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} = \\ &= \frac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} + \frac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v}}{\frac{\cos u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin u \sin v}{\cos u \cos v}} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.\end{aligned}$$

Вторую формулу получаем, заменив в первой формуле выражение v выражением $-v$:

$$\operatorname{tg}(u - v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg}(-v)}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg}(-v)} = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Две остальные формулы получаем, используя определение тангенса и формулы для $\sin(u + v)$ и $\sin(u - v)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v &= \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin(u + v)}{\cos u \cdot \cos v}, \\ \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v &= \frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin(u - v)}{\cos u \cdot \cos v}.\end{aligned}$$

Пример 1. Найдём $\cos 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 75^{\circ} &= \operatorname{tg} (45^{\circ} + 30^{\circ}) = \frac{\operatorname{tg} 45^{\circ} + \operatorname{tg} 30^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 45^{\circ} \operatorname{tg} 30^{\circ}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

С помощью установленных формул сложения легко доказываются *формулы приведения*, которые дают возможность сводить нахождение значений выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ к нахождению их значений для аргумента из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Формулы приведения отражают симметрию точек единичной окружности относительно координатных осей.

Теорема 4. Истинны формулы:

$$\begin{array}{ll}\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t; & \sin(\pi \pm t) = \mp \sin t; \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t; & \sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t; & \cos(\pi \pm t) = -\cos t; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t; & \cos(2\pi \pm t) = \cos t; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t; & \operatorname{tg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t; & \operatorname{tg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t; & \operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t; & \operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t.\end{array}$$

Доказательство. Формулы для синуса и косинуса доказываются по одной схеме. Докажем, например, формулы

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= \cos \frac{3\pi}{2} \cos t \mp \sin \frac{3\pi}{2} \sin t = \\ &= 0 \cdot \cos t \mp (-1) \cdot \sin t = \pm \sin t.\end{aligned}$$

Доказательство формул для тангенса и котангенса можно провести с использованием определений тангенса и котангенса и формул приведения для синуса и косинуса. Покажем, например, формулы $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$. Получаем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)} = \frac{\cos t}{\mp \sin t} = \mp \operatorname{ctg} t.$$

Формулы, составляющие содержание теоремы 4, позволяют запомнить следующее мнемоническое* правило: а) знак правой части определяется знаком левой, если считать, что значение переменной t принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) если первое слагаемое A аргумента ($A \pm t$) есть π или 2π , то название функции не изменяется, а если слагаемое A есть $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то название функции изменяется: $\sin$ на $\cos$; $\cos$ на $\sin$; tg на ctg ; ctg на tg .



1. Запишите формулы сложения для косинуса суммы и разности двух чисел.
2. Запишите формулы сложения для синуса суммы и разности двух чисел.
3. Запишите формулы сложения для тангенса суммы и разности двух чисел.
4. Сформулируйте мнемоническое правило, позволяющее записать любую из формул приведения.

592. Упростите выражение:

- а) $\cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$;
- б) $\cos 3\beta \cos 5\beta - \sin 3\beta \sin 5\beta$;
- в) $\sin 2\gamma \cos 3\gamma - \cos 2\gamma \sin 3\gamma$;
- г) $\cos 3\delta \sin 7\delta - \sin 3\delta \cos 7\delta$;
- д) $(\operatorname{tg} 4\epsilon + \operatorname{tg} 3\epsilon) : (1 - \operatorname{tg} 4\epsilon \operatorname{tg} 3\epsilon)$;
- е) $(\operatorname{tg} 2\tau - \operatorname{tg} 8\tau) : (1 + \operatorname{tg} 2\tau \operatorname{tg} 8\tau)$;
- ж) $(1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} 2\omega) : (\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} 2\omega)$;
- з) $(1 + \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 4\varphi) : (\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} 4\varphi)$.

* Мнемоника — (греч. μνημονικά) совокупность приёмов, которые делают более лёгким запоминание посредством образования искусственных ассоциаций.

593. Вычислите:

- а) $\cos 57^\circ \cos 123^\circ - \sin 57^\circ \sin 123^\circ$;
- б) $\cos 121^\circ \cos 31^\circ + \sin 121^\circ \sin 31^\circ$;
- в) $\sin 57^\circ \cos 123^\circ + \cos 57^\circ \sin 123^\circ$;
- г) $\sin 121^\circ \cos 31^\circ - \cos 121^\circ \sin 31^\circ$.

594. Вычислите:

- а) $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;
- б) $\cos 21^\circ 30' \cos 23^\circ 30' - \sin 21^\circ 30' \sin 23^\circ 30'$;
- в) $\sin 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' - \cos 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;
- г) $\sin 21^\circ 30' \cos 23^\circ 30' + \cos 21^\circ 30' \sin 23^\circ 30'$.

595. Вычислите:

- а) $\cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9}$;
- б) $\cos \frac{13\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{13\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$;
- в) $\sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9}$;
- г) $\sin \frac{13\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} - \cos \frac{13\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$.

596. Вычислите:

- а) $\frac{\operatorname{tg} 57^\circ 30' - \operatorname{tg} 27^\circ 30'}{1 + \operatorname{tg} 57^\circ 30' \operatorname{tg} 27^\circ 30'}$;
- б) $\frac{\operatorname{tg} 21^\circ 30' + \operatorname{tg} 23^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg} 21^\circ 30' \operatorname{tg} 23^\circ 30'}$;
- в) $\frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} \cdot \operatorname{tg} \frac{13\pi}{9}}$;
- г) $\frac{\operatorname{tg} \frac{13\pi}{11} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}}{1 + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{11} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}}$.

597. Вычислите:

- а) $(\operatorname{tg} 57^\circ + \operatorname{tg} 123^\circ) : (1 - \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 123^\circ)$;
- б) $(1 + \operatorname{tg} 157^\circ \operatorname{tg} 67^\circ) : (\operatorname{tg} 157^\circ - \operatorname{tg} 67^\circ)$;
- в) $(\operatorname{tg} 121^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ) : (1 + \operatorname{tg} 121^\circ \operatorname{tg} 31^\circ)$.
- г) $(1 - \operatorname{tg} 190^\circ \operatorname{tg} 80^\circ) : (\operatorname{tg} 190^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ)$.

598. Упростите выражение:

- а) $\cos \left(\frac{2\pi}{7} - a \right) \cos \left(\frac{3\pi}{14} + a \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{7} - a \right) \sin \left(\frac{3\pi}{14} + a \right)$;
- б) $\cos \left(\frac{5\pi}{12} + u \right) \cos \left(\frac{7\pi}{12} - u \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} + u \right) \sin \left(\frac{7\pi}{12} - u \right)$;

$$в) \sin\left(\frac{2\pi}{7} - c\right) \cos\left(\frac{3\pi}{14} + c\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} - c\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14} + c\right);$$

$$г) \cos\left(\frac{5\pi}{12} + r\right) \sin\left(\frac{7\pi}{12} - r\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{12} + r\right) \cos\left(\frac{7\pi}{12} - r\right).$$

599. Упростите выражение:

$$а) \left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) \right) : \left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) \right);$$

$$б) \left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - y\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9} + y\right) \right) : \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - y\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9} + y\right) \right);$$

$$в) \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \right) : \left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \right);$$

$$г) \left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - t\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} + t\right) \right) : \left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} + t\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - t\right) \right).$$

600. Найдите значение выражения:

$$а) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right), \text{ учитывая, что } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$б) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ учитывая, что } \cos x = -\frac{1}{3} \text{ и } \frac{\pi}{2} < x < \pi;$$

$$в) \sin\left(\frac{\pi}{6} + y\right), \text{ учитывая, что } \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \pi < y < \frac{3\pi}{2};$$

$$г) \sin\left(z - \frac{2\pi}{3}\right), \text{ учитывая, что } \operatorname{tg} z = -\frac{4}{3} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < z < 2\pi.$$

601. Найдите значение выражения:

$$а) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} + s\right), \text{ учитывая, что } \sin s = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} < s < \pi;$$

$$б) \operatorname{tg}\left(u - \frac{5\pi}{3}\right), \text{ учитывая, что } \operatorname{ctg} u = -\frac{4}{3} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi;$$

$$в) \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4} + v\right), \text{ учитывая, что } \sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < v < 2\pi;$$

$$г) \operatorname{ctg}\left(t - \frac{11\pi}{6}\right), \text{ учитывая, что } \operatorname{tg} t = -\frac{5}{3} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi.$$

602. Упростите выражение:

$$а) \frac{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}; \quad б) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg} \frac{25\pi}{21}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{25\pi}{21}}; \quad в) \frac{\operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}};$$

$$б) \frac{1 + \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 72^\circ}; \quad г) \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{28\pi}{15} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}{\operatorname{tg} \frac{28\pi}{15} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}; \quad е) \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}.$$

603. Найдите значение выражения:

- а) $\operatorname{tg} 15^\circ$; г) $\cos 75^\circ$; ж) $\operatorname{tg} 105^\circ$; к) $\cos 165^\circ$;
б) $\operatorname{ctg} 15^\circ$; д) $\operatorname{ctg} 75^\circ$; з) $\operatorname{ctg} 105^\circ$; л) $\operatorname{tg} 165^\circ$;
в) $\sin 75^\circ$; е) $\cos 105^\circ$; и) $\sin 165^\circ$; м) $\operatorname{ctg} 165^\circ$.

604. Упростите выражение:

- а) $\sin(-u) \cos(-v) + \sin(u+v)$;
б) $\sin(y-z) - \sin(-y) \cos(-z)$;
в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - \sin(s-t)$;
г) $\sin(\beta+\gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \sin(-\gamma)$;
д) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-f\right) + \cos\left(f+\frac{\pi}{3}\right)$;
е) $\sin\left(g+\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-g\right)$;
ж) $\frac{2 \cos k \sin l + \sin(k-l)}{2 \cos k \cos l - \cos(k-l)}$;
з) $\frac{\cos x \cos t - \cos(x+t)}{\cos(x-t) - \sin x \cos t}$.

605. Найдите значения выражений:

- а) $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$, учитывая, что $\cos x = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ и $\sin y = \frac{8}{17}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$;
б) $\sin(u+v)$ и $\cos(u-v)$, учитывая, что $\cos u = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ и $\sin v = -\frac{12}{13}$, $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$;
в) $\operatorname{tg}(i+j)$ и $\operatorname{tg}(i-j)$, учитывая, что $\operatorname{tg} i = -\frac{11}{60}$, $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ и $\operatorname{ctg} j = 3\frac{15}{16}$, $\pi < j < \frac{3\pi}{2}$;
г) $\operatorname{ctg}(r+s)$ и $\operatorname{ctg}(r-s)$, учитывая, что $\operatorname{ctg} r = 6\frac{6}{13}$, $\pi < r < \frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} s = -2,4$, $\frac{\pi}{2} < s < \pi$.

606. Докажите тождество:

- а) $\sin(x-y) \sin(x+y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;
б) $\cos(t-v) \cos(t+v) = \cos^2 t - \sin^2 v$;

$$в) \frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sqrt{2} \cos x}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) - \sqrt{3} \sin x} = \sqrt{2} \operatorname{tg} x;$$

$$г) \frac{\cos y - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + y \right)}{2 \sin \left(y - \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \sin y} = -\sqrt{3} \operatorname{tg} t;$$

$$д) \frac{\sin(s+t)}{\sin(s-t)} = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} t};$$

$$е) \frac{\cos(s-t)}{\cos(s+t)} = \frac{\operatorname{ctg} s \operatorname{ctg} t + 1}{\operatorname{ctg} s \operatorname{ctg} t - 1}.$$

607. Найдите значение выражения:

а) $\sin(x + y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\cos y = \frac{60}{61}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и четвёртой четвертях соответственно;

б) $\sin(x - y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{28}{53}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и первой четвертях соответственно;

в) $\sin(x + y)$, учитывая, что $\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin y = -\frac{4}{5}$, а углы x и y оканчиваются в первой и третьей четвертях соответственно;

г) $\cos(x + y)$, учитывая, что $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\sin y = \frac{40}{41}$, а углы x и y оканчиваются в третьей и второй четвертях соответственно;

д) $\cos(a - b)$, учитывая, что $\sin a = \frac{20}{29}$, $\cos b = -\frac{7}{25}$, а углы a и b оканчиваются во второй четверти;

е) $\sin(a - b)$, учитывая, что $\cos a = -\frac{15}{17}$, $\sin b = -\frac{3}{5}$, а углы a и b оканчиваются во второй и четвёртой четвертях соответственно;

ж) $\cos(g + h)$ и $\cos(g - h)$, учитывая, что $\cos g = \cos h$ и $\sin g = \sin h$.

608. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$, учитывая, что $\operatorname{tg} a = 7$;

б) $\operatorname{tg}(r + s)$ и $\operatorname{tg}(r - s)$, учитывая, что $\operatorname{tg} r = 1,2$, $\operatorname{tg} s = 0,7$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$, учитывая, что $\sin \varphi = \frac{3}{4}$ и угол φ оканчивается во второй четверти.

609. Найдите значение выражения:

а) $\sin \frac{13\pi}{12}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{12}$; и) $\sin \frac{19\pi}{12}$; н) $\sin \frac{23\pi}{12}$;

б) $\cos \frac{13\pi}{12}$; е) $\cos \frac{17\pi}{12}$; к) $\cos \frac{19\pi}{12}$; о) $\cos \frac{23\pi}{12}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}$; ж) $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{12}$; л) $\operatorname{tg} \frac{19\pi}{12}$; п) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{12}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}$; з) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{12}$; м) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{12}$; р) $\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{12}$.

610. Докажите тождество:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$;

б) $\sin(\pi + t) = -\sin t$; е) $\sin(\pi - t) = \sin t$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t$; ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$;

г) $\sin(2\pi + t) = \sin t$; з) $\sin(2\pi - t) = -\sin t$.

611. Докажите тождество:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$;

б) $\cos(\pi + t) = -\cos t$; е) $\cos(\pi - t) = -\cos t$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$; ж) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$;

г) $\cos(2\pi + t) = \cos t$; з) $\cos(2\pi - t) = \cos t$.

612. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{ctg} t$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$;

б) $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$; е) $\operatorname{tg}(\pi - t) = -\operatorname{tg} t$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{ctg} t$; ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$;

г) $\operatorname{tg}(2\pi + t) = \operatorname{tg} t$; з) $\operatorname{tg}(2\pi - t) = -\operatorname{tg} t$.

613. Докажите тождество:

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{tg} t$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{tg} t$;

б) $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$; г) $\operatorname{ctg}(2\pi + t) = \operatorname{ctg} t$;

$$д) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t ;$$

$$ж) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t ;$$

$$е) \operatorname{ctg}(\pi-t)=-\operatorname{ctg} t ;$$

$$з) \operatorname{ctg}(2\pi-t)=-\operatorname{ctg} t .$$

614. Упростите выражение:

$$а) \cos (x+y)+\cos \left(\frac{3 \pi}{2}+x\right) \cos \left(\frac{3 \pi}{2}+y\right) ;$$

$$б) \cos (r-s)-\cos \left(\frac{\pi}{2}-r\right) \cos \left(\frac{\pi}{2}-s\right) ;$$

$$в) \sin (u+v)+\sin \left(\frac{3 \pi}{2}-u\right) \cos \left(\frac{3 \pi}{2}+v\right) ;$$

$$г) \sin (i-j)-\cos \left(\frac{\pi}{2}-i\right) \sin \left(\frac{\pi}{2}+j\right) .$$

615. Упростите выражение:

$$а) \operatorname{tg}(k+l)(\operatorname{tg} k \operatorname{tg} l-1) ;$$

$$в) \operatorname{ctg}(m+n)(\operatorname{tg} m+\operatorname{tg} n) ;$$

$$б) \operatorname{tg}(a-c)(\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c+1) ;$$

$$г) \operatorname{ctg}(b+d)(\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} d) .$$

616. Упростите выражение:

$$а) \cos \left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos \left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) ;$$

$$д) \sin \left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin \left(\beta-\frac{\pi}{3}\right) ;$$

$$б) \cos \left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos \left(\frac{\pi}{6}-x\right) ;$$

$$е) \sin \left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin \left(\frac{\pi}{6}-x\right) ;$$

$$в) \frac{\sin (u+v)-\sin (u-v)}{\sin (u+v)+\sin (u-v)} ;$$

$$ж) \frac{\cos (u+v)-\cos (u-v)}{\cos (u+v)+\cos (u-v)} ;$$

$$г) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)-\cos \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)+\cos \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)} ;$$

$$з) \frac{\sin \left(\frac{5 \pi}{3}+\varphi\right)+\cos \left(\frac{5 \pi}{3}-\varphi\right)}{\sin \left(\frac{5 \pi}{3}-\varphi\right)-\cos \left(\frac{5 \pi}{3}+\varphi\right)} .$$

617. Докажите тождество:

$$а) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\frac{1+\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t} ;$$

$$б) \operatorname{tg} x+2 \operatorname{ctg} 2 x=\operatorname{ctg} x ;$$

$$в) \frac{\operatorname{tg} \beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}{\operatorname{ctg} \beta+\operatorname{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg} \beta ;$$

$$г) \operatorname{tg} x+2 \operatorname{tg} 2 x+4 \operatorname{tg} 4 x+8 \operatorname{ctg} 8 x=\operatorname{ctg} x .$$

618. Около квадрата $ABCD$ описана окружность, на меньшей из двух дуг с концами A и B отмечена точка M . Докажите, что лучи MC и MD делят угол AMB на три доли.

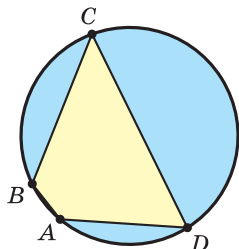


Рис. 300

619. Точки A, B, C, D разделяют окружность на дуги в отношении $AB : BC : CD : DA = 1 : 4 : 7 : 3$ (рис. 300). Найдите:

- углы четырёхугольника;
- угол между прямыми AB и CD ;
- угол между прямыми AC и BD .

620. Отрезки AB и CD пересекаются в точке Q , причём $AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$. Докажите, что точки A, B, C, D принадлежат одной окружности.

621. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B, C . Радиусы окружностей относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите косинус наименьшего угла треугольника ABC .

622. В сектор с острым центральным углом α вписан квадрат, три вершины которого находятся на радиусах, а четвёртая — на дуге (рис. 301). Найдите отношение площадей сектора и квадрата.

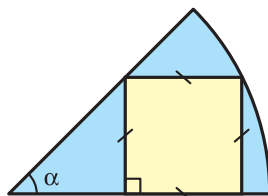


Рис. 301

623. Есть две концентричные окружности. В одной из них проведён диаметр AB , а на другой выбрана точка C . Докажите, что величина $AC^2 + BC^2$ не зависит от того, в какой окружности проведён диаметр и как выбрана точка на другой.

624. Автомобиль ехал сначала со скоростью 85 км/ч, а затем уменьшил её и с меньшей скоростью проехал 140 км. Найдите меньшую скорость автомобиля, учитывая, что время движения с этой скоростью было в 2 раза меньше времени движения с большей скоростью, а средняя скорость на всём пути составила 80 км/ч.

625. Доехав за $1,5$ ч из Шарковщины до Иодов, велосипедист снизил скорость на $3,5$ км/ч и с меньшей скоростью ехал до Браслава ещё 2 ч (рис. 302). Найдите расстояние

яния от Иодов до Шарковщины и Браслава, учитывая, что средняя скорость на всём пути составила 14 км/ч.

626. Точка M разбивает отрезок AB на части длиной 9 см и 15 см, на которых построены параллелограммы $AMCD$ и $BMEF$. Их высоты, проведённые к AB из точек D и F , отличаются на 8 см. Найдите возможные значения площади параллелограмма $AMCD$, учитывая, что вместе они дают площадь параллелограмма с основанием AB и высотой 18 см.

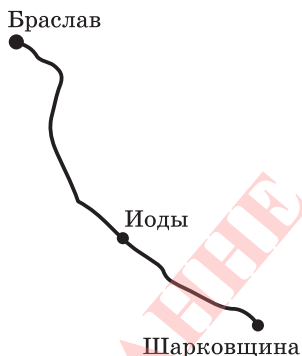


Рис. 302

627. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого цифры в сумме дают:

- а) 2010; б) 2011?

628. Найдите четырёхугольник с наименьшим периметром, у которого диагонали равны m и n , а угол между ними — φ .

629. Определите, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5. \end{cases}$$

13. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

При работе с введёнными в предыдущем параграфе тригонометрическими функциями удобно использовать их геометрические представления, связанные с единичной окружностью, центр которой находится в начале координат (рис. 303). Её называют **тригонометрической окружностью**.

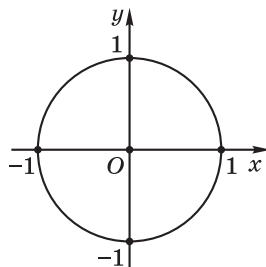


Рис. 303

Вы знаете, как числу t поставить в соответствие точку M_t единичной окружности. Она получается поворотом точки M_0 на t радиан. Косинус и синус числа t — проекции точки M_t на ось абсцисс (рис. 304) и ось ординат соответственно (рис. 305). Поэтому ось абсцисс называют **осью косинусов**, а ось ординат — **осью синусов** для тригонометрической окружности.

Координатную прямую, полученную параллельным переносом оси ординат на одну единицу вправо (рис. 306), называют **осью тангенсов**, так как проекция на неё точки M_t из начала координат O даёт значение тангенса числа t . Действительно, из подобия прямоугольных треугольников OAM_t и OM_0T имеем: $\frac{M_0T}{OM_0} = \frac{AM_t}{OA}$, или $M_0T = \operatorname{tg} t$, с учётом того, что $OM_0 = 1$, $OA = \cos t$ и $AM_t = \sin t$.

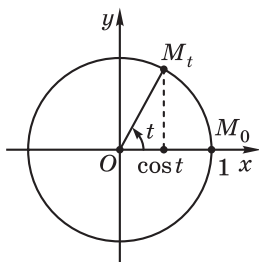


Рис. 304

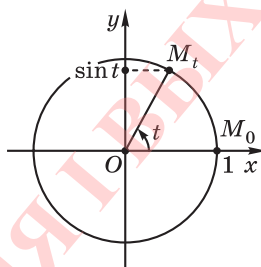


Рис. 305

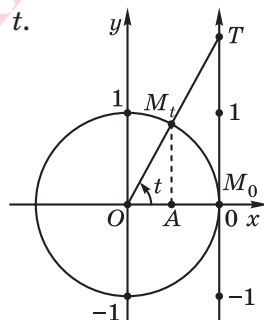


Рис. 306

Так же получаем, что если перенести ось абсцисс параллельно на одну единицу вверх (рис. 307), то из подобия прямоугольных треугольников OBM_t и ON_0K следует равенство $N_0K = BM_t : OB = \operatorname{ctg} t$. Поэтому координатную прямую N_0K называют **осью котангенсов**.

Из рисунка 308 видно, что $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$ — отрицательное число и его модуль больше единицы, число $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ — также отрицательное, а его модуль меньше единицы.

Проектирование вдоль оси ординат, как видно из рисунка 309, устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[-1; 1]$ оси косинусов и числами из

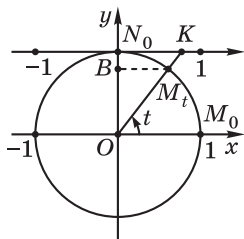


Рис. 307

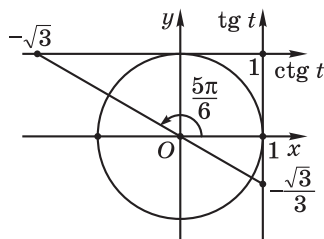


Рис. 308

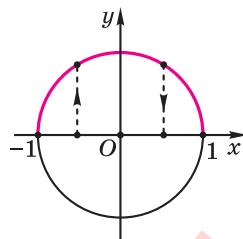


Рис. 309

промежутка $[0; \pi]$. При этом число, соответствующее числу a оси косинусов, называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$.

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

Таким образом, по определению

$$t = \arccos a \equiv 0 \leq t \leq \pi \text{ и } \cos t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\text{если } a \in [-1; 1], \text{ то } \cos(\arccos a) = a,$$

$$\text{а если } t \in [0; \pi], \text{ то } \arccos(\cos t) = t.$$

Как видно из рисунка 310, проектирование вдоль оси абсцисс устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[-1; 1]$ оси синусов и

числами из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При этом число, соответствующее числу a оси синусов, называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$.

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Таким образом, по определению

$$t = \arcsin a \equiv -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } \sin t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\text{если } a \in [-1; 1], \text{ то } \sin(\arcsin a) = a,$$

$$\text{а если } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin(\sin t) = t.$$

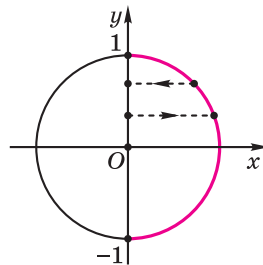


Рис. 310

Рисунок 311 показывает, что проектирование с центром O устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками оси тангенсов и числами из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. При этом число, соответствующее числу a оси тангенсов, называют арктангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$.

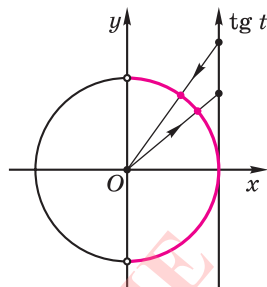


Рис. 311

Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Таким образом, по определению

$$t = \operatorname{arctg} a \equiv -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg} t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} a) = a,$$

$$\text{а если } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} t) = t.$$

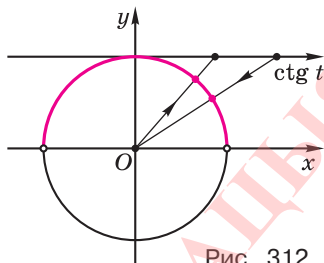


Рис. 312

Проектирование с центром O устанавливает, как видно из рисунка 312, взаимно однозначное соответствие между точками оси котангенсов и числами из промежутка $(0; \pi)$. При этом число, соответствующее числу a оси котангенсов, называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Таким образом, по определению

$$t = \operatorname{arcctg} a \equiv 0 < t < \pi \text{ и } \operatorname{ctg} t = a.$$

Из этого определения следует, что

$$\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} a) = a,$$

$$\text{а если } t \in (0; \pi), \text{ то } \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} t) = t.$$

Пример 1. Найдём значения выражений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, где $t = \arcsin \frac{1}{3}$.

Используя определение арксинуса, получаем, что число t удовлетворяет условиям $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t = \frac{1}{3}$. Тогда $\cos t = +\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, поскольку $\cos t > 0$. Далее находим, что $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 2\sqrt{2}$.

Пример 2. Найдём значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

Используя формулы приведения, получаем: $\sin\frac{7\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$. А поскольку $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$.

Пример 3. Сравним числа $\arccos\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Поскольку числа $\arccos\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ оба принадлежат промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(рис. 313), на котором большему значению аргумента соответствует меньшее значение косинуса и наоборот,

$\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то $\arccos\frac{1}{3} > \frac{\pi}{3}$.

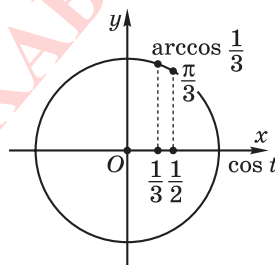


Рис. 313

Теорема 5. Для любого действительного числа a из промежутка $[-1; 1]$ истинны равенства:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Пусть число a принадлежит промежутку $[-1; 1]$. Тогда выражения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arcsin(-a)$ и $\arccos(-a)$ имеют значения, причём $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \arccos a \leq \pi$.

После умножения каждой части первого неравенства на число -1 получаем, что

$$\frac{\pi}{2} \geq -\arcsin a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ или } -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin a \leq \frac{\pi}{2}.$$

А поскольку

$$\sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a,$$

то, по определению арксинуса, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Первое тождество доказано.

Для доказательства второго тождества умножим на число -1 все части неравенства $0 \leq \arccos a \leq \pi$ и прибавим к каждой число π . Получаем:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\arccos a \geq -\pi, \\ \pi &\geq \pi - \arccos a \geq 0, \text{ или} \\ 0 &\leq \pi - \arccos a \leq \pi. \end{aligned} \quad (1)$$

А поскольку

$$\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a,$$

то, по определению арккосинуса, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Второе тождество доказано.

Чтобы доказать третье тождество, к каждой части неравенства (1) прибавим число $\frac{\pi}{2}$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\geq \frac{\pi}{2} - \arccos a \geq -\frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \\ \frac{\pi}{2} - \arccos a &\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = \cos(\arccos a) = a,$$

то, по определению арккосинуса, получаем, что

$$\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a, \text{ или } \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Для любого действительного числа a истинны равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(-a) &= -\operatorname{arctg} a, \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \\ \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для каждого действительного числа a выражения $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$, $\operatorname{arctg}(-a)$ и $\operatorname{arcctg}(-a)$ имеют значения, причём

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} a \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{arcctg} a \leq \pi.$$

После умножения каждой части первого неравенства на число -1 получаем,

$$\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{arctg} a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ или } -\frac{\pi}{2} \leq -\operatorname{arctg} a \leq \frac{\pi}{2}.$$

А поскольку

$$\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} a) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = -a,$$

то, по определению арктангенса, $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Первое тождество доказано.

Для доказательства второго тождества умножим на число -1 все части неравенства $0 \leq \operatorname{arccotg} a \leq \pi$ и прибавим к каждой число π . Получаем:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\operatorname{arccotg} a \geq -\pi, \\ \pi &\geq \pi - \operatorname{arccotg} a \geq 0, \text{ или} \\ 0 &\leq \pi - \operatorname{arccotg} a \leq \pi. \end{aligned} \quad (2)$$

А поскольку

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arccotg} a) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = -a,$$

то, по определению арккотангенса, $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$. Второе тождество доказано.

Чтобы доказать третье тождество, к каждой части неравенства (2) прибавим число $\frac{\pi}{2}$. Получаем, что

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} a\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} a) = a,$$

то, по определению арктангенса, получаем, что $\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} a$, или $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arccotg} a = \frac{\pi}{2}$.



1. Что называют тригонометрической окружностью?
2. Объясните названия *ось косинусов* и *ось синусов*.
3. Как расположены около тригонометрической окружности оси тангенсов и котангенсов?
4. Что называется арккосинусом числа a ? арксинусом числа a ? арктангенсом числа a ? арккотангенсом числа a ?
5. Какая есть зависимость между числами $\arcsin a$ и $\arcsin(-a)$? $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arctg}(-a)$?
6. Какая есть зависимость между числами $\arccos a$ и $\arccos(-a)$? $\operatorname{arccotg} a$ и $\operatorname{arccotg}(-a)$?
7. Какая есть зависимость между числами $\arcsin a$ и $\arccos a$? $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arccotg} a$?

630. Найдите значение t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющее условию:

- а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin t = \frac{1}{2}$; д) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = -\frac{1}{2}$; е) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

631. Определите, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу:

- а) $\arcsin 0,6$; в) $\arcsin (-0,8)$;
 б) $\arcsin 0,9$; г) $\arcsin (-0,1)$.

632. Вычислите:

- а) $\arcsin 1$; д) $\arcsin (-0,5)$; и) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
 б) $\arcsin (-1)$; е) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.
 в) $\arcsin 0$; ж) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
 г) $\arcsin \frac{1}{2}$; з) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

633. С помощью микрокалькулятора или таблиц найдите:

- а) $\arcsin 0,6691$; е) $\arcsin (-0,4848)$;
 б) $\arcsin 0,9101$; ж) $\arcsin (-0,9336)$;
 в) $\arcsin 0,9816$; з) $\arcsin (-0,9877)$;
 г) $\arcsin 0,9994$; и) $\arcsin (-0,8660)$.
 д) $\arcsin (-0,3090)$;

634. Найдите значение выражения:

- а) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$; г) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$;
 б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$; д) $\arcsin(\sin x)$, если $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$;
 в) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)$; е) $\arcsin(\sin x)$, если $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

635. Найдите значение выражения:

- а) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin(-1)$;

в) $6 \arcsin(-1) - 12 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

636. Определите, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, соответствующая числу:

а) $\arccos 0,7$;

в) $\arccos(-0,3)$;

б) $\arccos 0,1$;

г) $\arccos(-0,001)$.

637. Определите, истинно ли утверждение:

а) из того, что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следует, что $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

б) из того, что $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, следует, что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) из того, что $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, следует, что $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$;

г) из того, что $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, следует, что $\sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

638. Вычислите:

а) $\sin(\arcsin 0,6)$;

в) $\cos(\arcsin(\sqrt{3} - \sqrt{2}))$;

б) $\sin(\arcsin(-0,8))$;

г) $\cos\left(\arcsin \frac{\pi}{4}\right)$.

639. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

а) $\arcsin 0,4$;

б) $\arcsin(-0,8)$.

640. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$;

б) $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

641. Вычислите:

а) $\arccos 0$;

г) $\arccos \frac{1}{2}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arccos 1$;

д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

з) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos(-1)$;

е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

и) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

642. С помощью калькулятора или таблиц найдите значение выражения:

- а) $\arccos 0,4278$; е) $\arccos (-0,7878)$;
 б) $\arccos 0,2983$; ж) $\arccos (-0,897)$;
 в) $\arccos 0,9987$; з) $\arccos (-0,5679)$;
 г) $\arccos 0,0239$; и) $\arccos (-0,8660)$.
 д) $\arccos (-0,3298)$;

643. Определите, могут ли $\arccos a$ и $\arcsin a$ быть равными:

- а) $\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{22}}{3}$; д) $\frac{\pi}{2}$; ж) $-1,1$;
 б) $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{23}}{3}$; е) $\frac{4\pi}{3}$; з) -2 .

644. Найдите значение выражения:

- а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; г) $\arccos\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;
 б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)\right)$; д) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$;
 в) $\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$; е) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$.

645. Докажите тождество:

- а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

646. Заполните таблицу:

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

647. Решите уравнение:

- а) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin y = \frac{5\pi}{6}$; в) $\arccos z = \frac{5\pi}{6}$.

648. Определите, при каких значениях переменной a истинно равенство:

- а) $\arcsin\sqrt{1-a^2} = \arccos a$; г) $\arccos(\cos a) = a$;
 б) $\arccos\sqrt{1-a^2} = \arcsin a$; д) $\sin(\arcsin a) = a$;
 в) $\arcsin(\sin a) = a$; е) $\cos(\arccos a) = a$.

649. Найдите значение выражения:

а) $\arccos 0 + \arccos(-1) + \arccos 1$;

б) $\arccos 0 + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $5 \arccos(-1) - 12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

650. Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-5))$;

б) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-5))$.

651. Определите, истинно ли утверждение:

а) из того, что $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, следует, что $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

б) из того, что $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, следует, что $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

в) из того, что $\cos 3\pi = -1$, следует, что $\arccos(-1) = 3\pi$;

г) из того, что $\arccos(-1) = \pi$, следует, что $\cos \pi = -1$.

652. Найдите значение выражения:

а) $\cos(\arccos 0,5)$; в) $\sin(\arccos(\sqrt{2}-2))$;

б) $\cos(\arccos 0,2)$; г) $\sin(\arccos(3-\sqrt{2}))$.

653. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

а) $\arccos 0,5$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos(-0,5)$.

654. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$; в) $\arccos\left(\cos \frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;

б) $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$; г) $\arccos(\cos 6) = 6 - 2\pi$.

655. Вычислите:

а) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\arccos(\cos(-12))$.

б) $\arccos(\cos 12)$;

656. Определите, могут ли значения выражений $\arccos a$ и $\arcsin a$ принимать значения:

- а) одного знака; б) разных знаков.

657. Заполните таблицу:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctg a$							
$\text{arcctg } a$							

658. Найдите значение выражения:

- а) $\arctg 0 + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg \sqrt{3} + \arctg 1$;
 б) $\text{arcctg } 0 + \text{arcctg } \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{arcctg } \sqrt{3} + \text{arcctg } 1$;
 в) $\text{arcctg } 0 + \text{arcctg}(-1) - \text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{arcctg}(-\sqrt{3})$;
 г) $\arctg(-1) + \arctg(-\sqrt{3}) - \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctg 0$.

659. Определите, какие значения могут принимать числа a и b , учитывая, что:

- а) $b = \arcsin a$; в) $b = \arctg a$;
 б) $b = \arccos a$; г) $b = \text{arcctg } a$.

660. Определите, могут ли значения выражений $\arctg a$ и $\text{arcctg } a$ принимать значения:

- а) одного знака; б) разных знаков.

661. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс числа:

- а) $\arctg \frac{5}{12}$; в) $\text{arcctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;
 б) $\arctg(-0,75)$; г) $\text{arcctg } 0,75$.

662. Докажите, что истинно равенство:

- а) $\text{arcctg}\left(\text{ctg } \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$; в) $\text{arcctg}(\text{ctg } 7) = 7 - 2\pi$;
 б) $\text{arcctg}\left(\text{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right) = \frac{4\pi}{7}$; г) $\arctg(\text{tg } (-7)) = -7 + 2\pi$.

663. Вычислите:

- а) $\arctg(\text{ctg } 2)$; в) $\text{arcctg}(\text{ctg } (-10))$;
 б) $\text{arcctg}(\text{ctg } (-2))$; г) $\arctg(\text{tg } (-10))$.

664. Найдите значение выражения:

- а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\arcsin 0 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} 0$;
б) $\operatorname{arctg} 0$; е) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;
в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; ж) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; з) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

665. Вычислите:

- а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} 1$;
б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

666. Найдите значение выражения:

- а) $\cos^2\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) +$
 $\quad + \sin^2\left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2}\right)$;
б) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right)\right) - \arccos\left(\cos \frac{46\pi}{7}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}\right) +$
 $+ \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{8}\right)$.

667. Найдите значение выражения:

- а) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \arccos(-1)$;
б) $\arcsin\left(\sin \frac{33\pi}{7}\right) + \arccos\left(\cos \frac{46\pi}{7}\right)$;
в) $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

668. Вычислите:

- а) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;
б) $\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{5}\right)$; д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

669. Упростите выражение:

- а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{5}\right)$; г) $\arccos(\sin 10)$;
б) $\arccos(\cos 11)$; д) $\arcsin\left(\cos\frac{31\pi}{5}\right)$;
в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 8)$; е) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$.

670. Решите уравнение:

- а) $\arcsin a = \frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{arctg} a = -\frac{\pi}{6}$;
б) $\arccos a = \frac{2\pi}{3}$; г) $\arcsin(a - 1) = -\frac{\pi}{4}$.

671. Найдите значение выражения:

- а) $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$;
б) $\cos\left(\arccos\frac{15}{17} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;
в) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6 - \operatorname{arctg} 2,4)$;
г) $\sin\left(\arcsin 0,6 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;
д) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;
е) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$.

672. Вычислите:

- а) $\sin\left(3 \operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2 \arccos\frac{1}{2}\right)$;
б) $\cos\left(3 \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7}{3} \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{4} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

673. Вычислите:

- а) $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$;
б) $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $\arcsin\left(-\sin\frac{7\pi}{3}\right)$.

674. Определите, какой четверти тригонометрической окружности принадлежит число:

а) $\arctg 5$; в) $\operatorname{arccctg} 3$; д) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg}(-4)$;

б) $\arctg(-7)$; г) $\operatorname{arccctg}(-2)$; е) $\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

675. Докажите, что:

а) если тангенсы трёх острых углов равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$, то сумма этих углов равна $\frac{\pi}{4}$;

б) если $a = \operatorname{arccctg} \frac{3}{4}$ и $b = \operatorname{arccctg} \frac{1}{7}$, то $a + b = \frac{3\pi}{4}$.

676. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Докажите, что косинус внешнего несмежного с данными угла этого треугольника равен 0,352.

677. Определите, при каких значениях переменной истинно равенство:

а) $\arctg \frac{1}{a} = \operatorname{arccctg} a$; в) $\operatorname{tg}(\arctg a) = a$.

б) $\arctg(\operatorname{tg} a) = a$;

678. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arccctg} \frac{12}{5} - \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) = \operatorname{arccctg} \frac{140}{171}$;

б) $\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13} = \pi - \arccos \frac{16}{65}$;

в) $\arccos \frac{4}{5} + \arctg\left(-\frac{5}{12}\right) = \arctg \frac{16}{63}$;

г) $\arccos \frac{15}{17} - \arctg \frac{3}{4} = -\arcsin \frac{13}{85}$.

679. Упростите выражение:

а) $\arctg \frac{4}{3} - \arctg(-2,4)$; г) $\operatorname{arccctg} \frac{3}{4} + \arctg \frac{15}{8}$;

б) $\arctg \frac{5}{12} - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}$; д) $\arctg 2 + \arctg 3$;

в) $\operatorname{arccctg} \frac{8}{15} - \arctg \frac{12}{5}$; е) $\operatorname{arccctg} 2 + \operatorname{arccctg} 3$.

680. Упростите выражение:

- а) $\arcsin \frac{12}{13} + \arccos \frac{8}{17}$; г) $\arcsin \frac{12}{13} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$;
б) $\arccos \frac{7}{25} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; д) $\arccos \frac{15}{17} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$;
в) $\operatorname{arctg} 2,4 - \arccos \frac{3}{5}$; е) $\operatorname{arctg} 0,75 + \arcsin \left(-\frac{15}{17}\right)$.

681. Определите, может ли выражаться отрицательным числом:

- а) $\cos(\arcsin b)$; в) $\sin(\arccos b)$; д) $\operatorname{ctg}(\arcsin b)$;
б) $\cos(\operatorname{arctg} b)$; г) $\sin(\operatorname{arctg} b)$; е) $\operatorname{tg}(\arccos b)$.

682. Упростите выражение:

- а) $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0,3$; в) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$;
б) $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{11}$; г) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} h$ ($h > 0$).

683. Докажите, что при любом значении переменной a из промежутка $[-1; 1]$ истинна формула:

- а) $\arccos(2a^2 - 1) = 2 \arccos |a|$;
б) $\arccos(2a^2 - 1) = 2 \arccos a$.

684. Найдите значение выражения:

- а) $2 \arcsin \frac{1}{6} - \arccos \frac{17}{18}$;
б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$;
в) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{12}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$;
г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$;
д) $\arccos \frac{3}{5} - \arccos \frac{15}{17} + \arccos \frac{36}{85}$;
е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

685. Докажите, что равенство:

а) $\operatorname{arctg} a = \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$ истинно при любом значении переменной a ;

б) $2 \arcsin \sqrt{\frac{1-a}{2}} = \arccos a$ истинно, если $|a| \leq 1$;

в) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-ab}{a+b} \right)$, истинно, если $a > 0, b > 0$;

г) $\arccos a - \arccos b = \arcsin(b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2})$ истинно, если $0 \leq a \leq 1$ и $0 \leq b \leq 1$;

д) $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \operatorname{arctg}|a|$ истинно при любом значении переменной a ;

е) $\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \arcsin a$ истинно, если $|a| < 1$.

686. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17}\right)$;

б) $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right)$;

в) $\sin\left(2\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$;

г) $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

687. Упростите выражение:

а) $\cos(\arccos n + \arccos m)$;

ж) $\cos(2 \operatorname{arctg} h)$;

б) $\sin(\arccos b + \arcsin c)$;

з) $\sin(2 \operatorname{arctg} g)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} e)$;

и) $\cos(2 \operatorname{arctg} f)$;

г) $\operatorname{tg}(\arcsin k + \arcsin l)$;

к) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos d\right)$;

д) $\sin(2 \arcsin p)$;

л) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} s\right)$;

е) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} j)$;

м) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t\right)$.

688. Определите, истинно ли равенство:

а) $\arccos \frac{7}{8} = 2 \arcsin \frac{1}{4}$;

б) $\arccos \frac{17}{18} = \arcsin \frac{1}{6}$;

в) $\arccos \frac{7}{9} = 2 \arcsin \frac{1}{6}$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}$;

д) $\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$;

е) $\arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$.

689. Определите, истинно ли равенство:

а) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2})$;

д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$;

е) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

690. Докажите тождество:

а) $\operatorname{arctg} k = \arcsin \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$;

б) $2 \arccos \sqrt{\frac{1+z}{2}} = \arccos z$;

в) $\frac{1}{2} \arccos(2s^2 - 1) = \arccos s$, если $s \geq 0$.

691. Докажите тождество:

а) $\arcsin p = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-p^2}, & \text{если } 0 \leq p \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-p^2}, & \text{если } -1 \leq p < 0; \end{cases}$

б) $\arcsin n = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}, & \text{если } 0 < n \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} - \pi, & \text{если } -1 \leq n < 0. \end{cases}$

692. Докажите тождество:

а) $\arccos l = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-l^2}, & \text{если } 0 \leq l \leq 1, \\ \pi - \arccos \sqrt{1-l^2}, & \text{если } -1 \leq l < 0; \end{cases}$

б) $\arccos j = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{если } 0 < j \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{если } -1 \leq j < 0. \end{cases}$

693. Докажите тождество:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} k = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{если } k > 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{если } k \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} m = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{m}, & \text{если } m > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{m} - \pi, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

694. Докажите тождество:

$$\text{а) } \operatorname{arctg} b = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{если } b \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{если } b < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} c = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{c}, & \text{если } c > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{c}, & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

695. Может ли синус быть равным:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{10}}{\pi}; \quad \text{б) } n + \frac{1}{n}; \quad \text{в) } \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}; \quad \text{г) } \frac{2\sqrt{cd}}{c+d}?$$

696. Найдите катеты прямоугольного треугольника с площадью S , учитывая, что:

- а) радиус описанной около него окружности равен R ;
- б) радиус вписанной в него окружности равен r ;
- в) высота, проведённая к гипотенузе, равна h ;
- г) медиана, проведённая к катету, равна m ;
- д) биссектриса, проведённая к гипотенузе, равна l .

697. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

698. Из точки M к окружности проведены касательная MA и секущая BC (рис. 314). Найдите площадь треугольника $MAВ$, учитывая, что $MB = 16$, $BC = 8$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

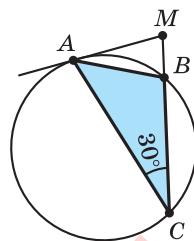


Рис. 314

699. Автомобиль из Бреста до Ружан ехал с одной скоростью, а затем снизил её и на путь до Гродно (рис. 315) затратил на 30 мин больше, чем на первую часть пути. Найдите скорости автомобиля на каждой части пути, учитывая, что средняя скорость на всём пути оказалась равной 82 км/ч.



Рис. 315

700. Есть два конуса, площади боковых поверхностей которых равны 608π см² и 475π см², причём образующая первого конуса на 19 см больше. Радиус основания третьего конуса, боковая поверхность которого равна суммарной боковой поверхности первого и второго конусов, а образующая — суммарной длине образующих этих конусов, имеет длину 19 см. Найдите радиусы оснований конусов, учитывая, что боковая поверхность S конуса, радиус R его основания и образующая l связаны формулой $S = \pi Rl$ (рис. 316).

701. а) Докажите, что сумма квадратов любых десяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть точный квадрат.

702. Медианы AD и BF треугольника ABC пересекаются в точке M .

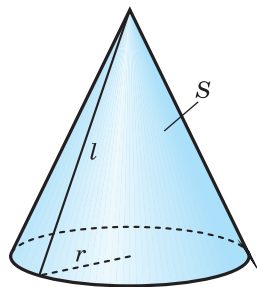


Рис. 316

Найдите периметр треугольника, учитывая, что в четырёхугольник $CDMF$ можно вписать окружность, $AB = 6$ и $MD = \sqrt{3}$.

703. Определите угол между диагоналями четырёхугольника, последовательные стороны которого равны 8, 12, 9, 1.

14. Применения формул сложения

Доказанные в предыдущем параграфе формулы приведения следуют из формул сложения. Эти формулы имеют и другие важные следствия.

Теорема 7. Формулы

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Используя соответствующие формулы сложения, получим:

$$\begin{aligned}\sin 2t &= \sin(t + t) = \sin t \cos t + \cos t \sin t = 2 \sin t \cos t; \\ \cos 2t &= \cos(t + t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t;\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2t = \operatorname{tg}(t + t) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} t} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}.$$

Формулы, установленные теоремой 7, называют *формулами двойного аргумента*. Эти формулы позволяют синус, косинус, тангенс любого аргумента выразить через тригонометрические выражения вдвое меньшего аргумента. Например,

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin 3y = 2 \sin \frac{3y}{2} \cos \frac{3y}{2},$$

$$\operatorname{tg} 12t = \frac{2 \operatorname{tg} 6t}{1 - \operatorname{tg}^2 6t}.$$

Пример 1. Упростим выражение $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t$.

Получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t &= \frac{\sin 3t}{\cos 3t} - \frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \frac{\sin^2 3t - \cos^2 3t}{\sin 3t \cos 3t} = \\ &= -2 \cdot \frac{\cos^2 3t - \sin^2 3t}{2 \sin 3t \cos 3t} = -2 \cdot \frac{\cos 6t}{\sin 6t} = -2 \operatorname{ctg} 6t.\end{aligned}$$

Теорема 8. Формулы

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} t = \frac{1 - \cos 2t}{\sin 2t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Поскольку $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2 \sin^2 t$ и $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$, то

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Для доказательства третьего равенства преобразуем его правую часть:

$$\frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} = \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Так же доказывается четвёртое равенство.

Формулы, установленные теоремой 8, позволяют выразить синус, косинус и тангенс любого аргумента через тригонометрические выражения вдвое большего аргумента. Иногда их называют *формулами половинного аргумента*. Первые две из этих формул называют *формулами понижения степени*.

Пример 2. Найдём значение выражения $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$, учитывая, что $\cos x = \frac{60}{61}$.

Получим:

$$\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 + \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^2.$$

Теперь учтём, что $\cos x = \frac{60}{61}$:

$$\left(\frac{1 - \frac{60}{61}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{60}{61}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 61} \right)^2 + \left(\frac{121}{2 \cdot 61} \right)^2 = \frac{1 + 14641}{14884} = \frac{14642}{14884} = \frac{7321}{7442}.$$

Теорема 9. Формулы

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2},$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2},$$

$$\begin{aligned}\cos u + \cos v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}, \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}\end{aligned}$$

являются тождествами.

Доказательство. Обратим внимание на то, что истинны равенства:

$$u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}; \quad v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}.$$

Учитывая это, получим:

$$\begin{aligned}\sin u + \sin v &= \sin\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) + \sin\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = \\ &= \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} + \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} + \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} - \\ &\quad - \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично доказываются три остальные формулы.

Пример 3. Найдём значение выражения:

а) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$; б) $\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\text{а) } \sin 105^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{б) } \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12} &= -2 \sin \frac{\frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

Пример 4. Докажем истинность равенства $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = 4$.

Будем последовательно получать:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ &= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - \\ &\quad - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) = \frac{\sin(9^\circ + 81^\circ)}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin(27^\circ + 63^\circ)}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} = \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{2 \cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{2}{2 \cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \\ &= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{2(2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \\ &= \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cos 36^\circ} = 4.\end{aligned}$$

Теорема 10. Формулы

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) - \cos (u + v)),$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) + \cos (u + v)),$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin (u - v) + \sin (u + v))$$

истинны при любых значениях переменных u и v .

Доказательство. Мы знаем, что истинны равенства:

$$\cos (u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$

$$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$

$$\sin (u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$

$$\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$\cos (u - v) - \cos (u + v) = 2 \sin u \sin v,$$

или

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) - \cos (u + v)).$$

Сложив первое и второе равенства, придём к равенству

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) + \cos (u + v)),$$

а сложив третье и четвёртое равенства — к равенству

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin (u - v) + \sin (u + v)).$$

Пример 5. Упростим выражение

$$\sin x + \sin (x + a) + \sin (x + 2a) + \sin (x + 3a).$$

Используем такой приём: умножим данное выражение

на выражение $\frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$, которое равно единице. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} (\sin x \sin \frac{a}{2} + \sin (x + a) \sin \frac{a}{2} + \\ & + \sin (x + 2a) \sin \frac{a}{2} + \sin (x + 3a) \sin \frac{a}{2}) = \\ & = \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{3a}{2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5a}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5a}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{7a}{2}\right) \Bigg) = \\
 & = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left(\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{7a}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Формула $\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$, доказанная в теореме 7, даёт возможность тангенс некоторого аргумента выразить через тангенс вдвое меньшего аргумента. Через тангенс такого аргумента можно выразить также синус и косинус.

Теорема 11. Формулы

$$\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad \cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

являются тождествами.

Доказательство. Мы знаем, что истинно равенство

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t.$$

Его можно записать в виде

$$\sin 2t = \frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t},$$

учитывая, что $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$.

Теперь разделим числитель и знаменатель дроби правой части на $\cos^2 t$ и учтём определение тангенса:

$$\sin 2t = \frac{\frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t}}{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Формулы, установленные теоремой 11, позволяют тригонометрическое выражение вида $A \sin x + B \cos x + C \operatorname{tg} x + D$ представить рациональным выражением от $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Их иногда называют *формулами универсальной тригонометрической подстановки*.

Пример 6. Найдём значение выражения $2 \sin^2\left(b + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos^2 b + \operatorname{tg} b$, учитывая, что $\operatorname{tg} b = 7$.

Используя формулы понижения степени из теоремы 8 и формулы универсальной тригонометрической подстановки из теоремы 11, получим:

$$2 \sin^2\left(b + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos^2 b + \operatorname{tg} b = 1 - \cos\left(2b + \frac{\pi}{2}\right) - 1 - \cos 2b + \\ + \operatorname{tg} b = \sin 2b - \cos 2b + \operatorname{tg} b = \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} + \operatorname{tg} b.$$

Теперь, учитывая, что $\operatorname{tg} b = 7$, проводим вычисления:

$$\frac{2 \cdot 7}{1 + 7^2} - \frac{1 - 7^2}{1 + 7^2} + 7 = 7 + \frac{14}{50} - \frac{48}{50} = 6,32.$$

Сориентироваться в формулах, установленных теоремами 7—11, вам поможет схема, приведённая на рисунке 317.



1. Запишите формулы двойного аргумента для синуса, косинуса и тангенса.
2. Запишите формулы, выражающие косинус двойного аргумента через: синус вдвое меньшего аргумента; косинус вдвое меньшего аргумента.
3. Запишите формулы половинного аргумента, выражающие синус, косинус, тангенс данного аргумента через косинус вдвое большего аргумента.
4. Запишите формулы преобразования в произведение суммы и разности синусов.
5. Запишите формулы преобразования в произведение суммы и разности косинусов.
6. Запишите формулы преобразования в сумму произведения синусов; произведения косинусов; произведения синуса и косинуса.
7. Запишите формулы, выражающие синус, косинус и тангенс данного аргумента через тангенс вдвое меньшего аргумента.

704. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\cos b}{1 + \sin b};$

б) $(3 \sin y + 2 \cos y)^2 + (2 \sin y - 3 \cos y)^2;$

в) $\operatorname{tg}^2 b - \sin^2 b - \operatorname{tg}^2 b \sin^2 b;$

г) $\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} + \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}}.$

705. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = 2 \sin a \cdot \cos a;$

$$\text{б)} \frac{\operatorname{tg} 4b - \operatorname{tg} 3b}{1 + \operatorname{tg} 4b \cdot \operatorname{tg} 3b} = \operatorname{tg} b;$$

$$\text{в)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 - \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi;$$

$$\text{г)} \sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 a = 1.$$

706. Упростите выражение:

$$\text{а)} 2 \cos^2 \frac{c}{2} - 1;$$

$$\text{г)} \frac{1 + \sin 2c}{(\sin c + \cos c)^2};$$

$$\text{б)} \frac{\sin(x+y) - \cos x \sin y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y};$$

$$\text{д)} \frac{1 - \cos 2c + \sin 2c}{1 + \cos 2c + \sin 2c};$$

$$\text{в)} 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta;$$

$$\text{е)} \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) + \sin(x+y) \cdot \sin(x-y).$$

707. Докажите тождество:

$$\text{а)} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin a + \cos a);$$

$$\text{б)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + d\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + d\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + d\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + d\right)} = \operatorname{tg} d;$$

$$\text{в)} \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0.$$

708. Вычислите:

$$\text{а)} 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ;$$

$$\text{г)} (\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2;$$

$$\text{б)} 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$$

$$\text{д)} (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2;$$

$$\text{в)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$\text{е)} \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}.$$

709. Вычислите:

$$\text{а)} 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8};$$

$$\text{г)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$\text{б)} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4};$$

$$\text{д)} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8};$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2;$$

$$\text{е)} 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1.$$

710. Упростите выражение:

$$\text{а)} 2 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ;$$

$$\text{б)} (\sin 10^\circ + \sin 80^\circ) \cdot (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ);$$

$$\text{в)} \cos^4 \beta - \sin^4 \beta;$$

$$\text{г)} \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma + 2 \sin \gamma \cos \gamma;$$

$$\text{д) } 1 - 4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi; \quad \text{е) } \frac{(\cos \beta - \sin \beta)^2}{1 - \sin^2 2\beta}.$$

711. Докажите тождество:

$$\text{а) } \sin 2\gamma = (\sin \gamma + \cos \gamma)^2 - 1;$$

$$\text{б) } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$\text{в) } \cos^4 \gamma - \sin^4 \gamma = \cos 2\gamma;$$

$$\text{г) } 2 \cos^2 x - \cos 2x = 1;$$

$$\text{д) } 1 + \cos 2y = 2 \cos^2 y;$$

$$\text{е) } 1 - \cos 2z = 2 \sin^2 z.$$

712. Докажите тождество:

$$\text{а) } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \text{г) } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$\text{б) } 1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}; \quad \text{д) } 1 + \sin \gamma = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right);$$

$$\text{в) } \frac{1 - \cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \operatorname{tg} \beta; \quad \text{е) } \frac{\sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma} = \operatorname{tg} \gamma.$$

713. Докажите тождество:

$$\text{а) } \frac{\cos 2\beta}{\sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta} = \operatorname{ctg} \beta - 1;$$

$$\text{б) } \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \varphi (1 + \cos 2\varphi) = \sin 2\varphi.$$

714. Упростите выражение:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}; \quad \text{в) } \frac{\cos a \cdot \sin a}{\cos^2 a - \sin^2 a};$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg} \frac{y}{2} - \operatorname{tg} \frac{y}{2}; \quad \text{г) } \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

715. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{5}{13}$. Найдите синус и косинус угла между боковыми сторонами.

716. Найдите значение переменной из промежутка:

$$\text{а) } (\pi; 2\pi), \text{ удовлетворяющее равенству } \sin 2x - 2 \cos x = 0;$$

$$\text{б) } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right), \text{ удовлетворяющее равенству } \cos 2y + 3 \sin y = 1;$$

$$\text{в) } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right), \text{ удовлетворяющее равенству } 2 \sin z = \sin 2z;$$

$$\text{г) } (\pi; 2\pi), \text{ удовлетворяющее равенству } \sin^2 t = -\cos 2t.$$

717. Вычислите $\sin 2\gamma$, $\cos 2\gamma$ и $\operatorname{tg} 2\gamma$, учитывая, что:

- а) $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ и $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg} \gamma = 2,4$ и $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$;
б) $\cos \gamma = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$; г) $\operatorname{ctg} \gamma = -2$ и $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

718. Найдите:

- а) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, учитывая, что $\sin \beta = \frac{3}{5}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;
б) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, учитывая, что $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;
в) $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$, учитывая, что $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{12}{13}$ и $\pi < \gamma < 2\pi$;
г) $\sin 4p$ и $\cos 4p$, учитывая, что $\cos 2p = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{4} < p < \frac{\pi}{2}$;
д) $\operatorname{tg} 4\phi$, учитывая, что $\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{5}$.

719. Вычислите:

- а) $\sin 2\alpha$, учитывая, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$;
б) $\sin 2\beta$, учитывая, что $\sin \beta - \cos \beta = -\frac{1}{3}$;
в) $\cos 2\alpha$, учитывая, что $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{2}{5}$;
г) $\cos 2\beta$, учитывая, что $\sin \beta - \cos \beta = \frac{4}{7}$;
д) $\operatorname{tg} 2\alpha$, учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$;
е) $\operatorname{ctg} 2\beta$, учитывая, что $\operatorname{tg} \beta = -0,8$.

720. Докажите, что $\sin 2\beta < 2 \sin \beta$, если $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите условие, при котором $\sin 2\beta = 2 \sin \beta$.

721. Учитывая, что $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, установите, значение какого выражения больше:

- а) $\cos 2\beta$ или $2 \cos \beta$; б) $\operatorname{tg} 2\beta$ или $2 \operatorname{tg} \beta$, если $\beta \neq \frac{\pi}{4}$.

722. Найдите наименьшее по модулю значение переменной, удовлетворяющее равенству:

- а) $\sin 2k = \sin k$; в) $1 + \sin^2 2u = 4 \sin^2 u$.
б) $\sin t = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

723. Найдите значение переменной из промежутка:

- а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющее равенству $\sin^2 m - \cos^2 m = 0,5$;

б) $\left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$, удовлетворяющее равенству $\sin z \cdot \cos z = 0,25$;

в) $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$, удовлетворяющее равенству $\operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg} b$.

724. Докажите, что если $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, то $4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{4 \sin^4 \varphi + \sin^2 2\varphi} = 2$.

725. Учитывая, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, представьте произведением выражение:

а) $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$; б) $\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}$.

726. Упростите выражение:

а) $1 - 2 \sin^2 \gamma + \cos 2\gamma$;

б) $(\cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta - \sin^2 \beta)^2$;

в) $\cos 4z + 2 \sin^2 2z$.

727. Выразите:

а) $\sin 3t, \cos 3t, \sin 4t, \cos 4t$ через $\sin t, \cos t$;

б) $\operatorname{tg} 3t, \operatorname{tg} 4t$ через $\operatorname{tg} t$.

728. Учитывая, что $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, и используя формулы для $\sin 2\gamma$ и $\cos 3\gamma$, вычислите $\sin 18^\circ$.

729. Учитывая, что:

а) $\cos z = \frac{3}{4}$ и $0 < z < \frac{\pi}{2}$, найдите $\sin \frac{z}{2}, \cos \frac{z}{2}, \operatorname{tg} \frac{z}{2}$;

б) $\sin 2y = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{4}$, найдите $\cos y, \sin y, \operatorname{tg} y$.

730. Докажите тождество:

а) $1 + \sin \gamma = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$;

б) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$;

г) $\cos^2 h - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2g\right)$;

д) $\sin^2 g - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(2g - \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $2 \cos^2 y - \cos 2y = 1$.

731. Учитывая, что:

- а) $\cos \beta = \frac{1}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите $\sin \frac{\beta}{2}$, $\cos \frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$;
б) $\sin \gamma = 0,28$ и $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, найдите $\sin \frac{\gamma}{2}$, $\cos \frac{\gamma}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$;
в) $\cos \varphi = -\frac{8}{17}$ и $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, найдите $\sin \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$;
г) $\sin \varphi = -\frac{24}{25}$ и $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$, найдите $\sin \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

732. Найдите синус, косинус и тангенс угла:

- а) $22^\circ 30'$; в) $67^\circ 30'$; д) $7^\circ 30'$;
б) 15° ; г) $11^\circ 15'$; е) $33^\circ 45'$.

733. В равнобедренном треугольнике косинус угла между боковыми сторонами равен $\frac{7}{25}$. Найдите синус и косинус угла при основании.

734. Найдите $\sin a$, $\cos a$ и $\operatorname{tg} a$, учитывая, что $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

735. Учитывая, что:

- а) $\sin \beta = \frac{336}{625}$ и $\frac{5\pi}{2} < \beta < 3\pi$, найдите $\sin \frac{\beta}{4}$;
б) $\cos 2\gamma = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, найдите $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{4}$;
в) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$ и $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, найдите $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

736. Выразите:

- а) $\sin \frac{a}{2}$ и $\cos \frac{a}{2}$ через $\sin a$; в) $\operatorname{ctg} \frac{c}{2}$ через $\operatorname{ctg} c$;
б) $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$ через $\operatorname{tg} b$;

737. Найдите значение переменной из промежутка:

- а) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, удовлетворяющее равенству $1 - \cos t = \sin \frac{t}{2}$;
б) $(2\pi; 4\pi)$, удовлетворяющее равенству $1 - \cos h = \sin h$;
в) $\left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$, удовлетворяющее равенству $1 + \cos g = \cos \frac{g}{2}$.

738. Упростите выражение:

- а) $\sqrt{2(1 + \cos 2x)}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; г) $\frac{\sin b}{1 + \cos b}$;
б) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4y}$, $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}$; д) $\frac{1 - \sin 2p}{1 + \sin 2p}$;
в) $\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$; е) $\frac{1 - \cos 2q}{\sin 2q}$.

739. Учитывая, что:

а) $\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 2,2$, найдите $\sin 2\beta$ и $\cos 2\beta$;

б) $\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} = \frac{39}{41}$, найдите $\sin 2\gamma$ и $\cos 2\gamma$;

в) $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, найдите $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$.

740. Вычислите:

а) $1 - 2 \sin^2 15^\circ$; в) $\frac{1 - 2 \sin^2 22^\circ 30'}{2 \cos^2 15^\circ - 1}$; д) $\frac{2 \operatorname{ctg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ}$;

б) $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$; г) $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; е) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 9^\circ}{2 \operatorname{tg} 9^\circ}$.

741. Используя формулы понижения степени, выразите через синус и косинус в первой степени выражение:

а) $\sin^3 x$; б) $\sin^4 y$; в) $\sin^2 z \cdot \cos^4 z$.

742. Установите истинность равенства:

а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;

б) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\sin 18^\circ$;

в) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;

г) $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = \cos 70^\circ$.

743. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $\sin 40^\circ + \sin 80^\circ$; д) $\sin 40^\circ - \cos 25^\circ$;

б) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$; е) $\sin 20^\circ + \cos 80^\circ$;

в) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$; ж) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 80^\circ$;

г) $\cos 15^\circ - \cos 25^\circ$; з) $\operatorname{tg} 95^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$.

744. Представьте произведением выражение:

а) $\sin 24^\circ + \sin 26^\circ$; д) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;

б) $\sin 5r - \sin 3r$; е) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;

в) $\cos 23^\circ + \cos 43^\circ$; ж) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

г) $\cos 1 - \cos 5$; з) $\cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right)$.

745. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 52^\circ + \cos 18^\circ$; г) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$;

б) $\cos 78^\circ - \cos 18^\circ$; д) $\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10}$;

в) $\sin 133^\circ - \sin 13^\circ$; е) $\sin \frac{\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15}$;

- ж) $\cos x + \cos 5x$; к) $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} d$;
 з) $\sin x + \sin 7x$; л) $\cos(x - 2y) - \cos(x + 2y)$;
 и) $\sin 3d - \sin d$; м) $\sin(x + 3y) - \sin(x - 3y)$.

746. Упростите выражение:

- а) $\frac{\sin 35^\circ - \sin 25^\circ}{\sin 35^\circ + \sin 25^\circ}$; в) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}$;
 б) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$;

747. Представьте произведением выражение:

- а) $\sin 17^\circ + \cos 29^\circ$; г) $\sin c - \cos d$;
 б) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$; д) $\sin 19^\circ + 2\sin 25^\circ + \sin 31^\circ$;
 в) $\sin b + \cos b$; е) $2\cos 2x + \cos 5x + \cos x$.

748. Представьте произведением выражение:

- а) $1 - 2\cos \beta + \cos 2\beta$; г) $\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}$;
 б) $\sin \gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma$; д) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha - \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$;
 в) $\cos z - \cos 2z + \cos 3z$; е) $\frac{\sin a + \sin 2a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a}$.

749. Представьте произведением выражение:

- а) $\sin^2 a - \sin^2 b$; г) $\cos^2 16^\circ - \sin^2 20^\circ$;
 б) $\cos^2 a - \cos^2 b$; д) $\sin^2 5q - \sin^2 3q$;
 в) $\sin^2 a - \cos^2 b$; е) $1 - \cos^2 y - \cos^2 z$.

750. Установите истинность равенства:

- а) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ$;
 б) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1$;
 в) $16 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$;
 г) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ$.

751. Докажите тождество:

- а) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}$; г) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$;
 б) $\frac{\operatorname{tg} 2z \cdot \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} 2z - \operatorname{tg} z} = \sin 2z$; д) $\frac{\operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - 1} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - y \right)$;
 в) $\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)$; е) $\frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma} = \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

752. Представьте произведением выражение:

- а) $\cos a - \sin a$; в) $\frac{1}{2} - \cos \varphi$; д) $1 + 2 \cos \varphi$;
б) $\cos k + \sin k$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin k$; е) $2 \sin a - \sqrt{3}$.

753. Докажите тождество:

- а) $\sqrt{2} + 2 \cos a = 4 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a}{2}\right)$;
б) $3 - 4 \sin^2 b = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + b\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - b\right)$;
в) $1 - 4 \cos^2 c = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + c\right) \cdot \sin\left(c - \frac{\pi}{3}\right)$;
г) $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}$;
д) $\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \cdot \sin 2y$;
е) $\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y) = -\sin 2x \cdot \sin 2y$;
ж) $1 + \cos z + \cos 2z = 4 \cos z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{z}{2}\right)$;
з) $\cos z + \cos 2z + \cos 3z = 4 \cos 2z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{z}{2}\right)$.

754. Докажите тождество:

- а) $\sin d - \sin 2d + \sin 3d = 4 \cos \frac{3d}{2} \cdot \cos d \cdot \sin \frac{d}{2}$;
б) $\sqrt{1 + \sin \varphi} - \sqrt{1 - \sin \varphi} = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$, учитывая, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
в) $\sin \gamma + \sin 3\gamma + \sin 5\gamma + \sin 7\gamma = 4 \cos \gamma \cdot \cos 2\gamma \cdot \sin 4\gamma$;
г) $\cos^2 k + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - k\right) = \frac{3}{2}$;
д) $1 - \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}$;
е) $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{\sqrt{-\cos 2\varphi}}{\sin \varphi}$.

755. Докажите, что значение выражения

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 (\beta + \alpha) - 2 \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\beta + \alpha)$$

не зависит от переменной α .

756. Учитывая, что углы треугольника связаны отношением

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \cos(A - B) \cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4},$$

найдите угол C .

757. Учитывая, что A, B, C — углы треугольника, докажите тождество:

а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2};$

б) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2};$

в) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C;$

г) $\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C;$

д) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$

е) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C;$

ж) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C;$

з) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C;$

и) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$

758. Учитывая, что $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, представьте произведением выражение:

а) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C;$ б) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C.$

759. Выразите суммой произведение:

а) $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 10^\circ;$

д) $\cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ;$

б) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5};$

е) $\cos n \cdot \cos (n + 1);$

в) $2 \cos 3 \cdot \sin 2;$

ж) $2 \cos (k + l) \cdot \cos (k - l);$

г) $\sin (f - g) \cdot \cos (f + g);$ з) $\cos \left(\frac{m}{2} + 2 \right) \cdot \cos \left(\frac{3m}{2} + 1 \right).$

760. Выразите суммой произведение:

а) $\sin 55^\circ \cdot \sin 33^\circ;$

б) $2 \sin a \cdot \sin 2a;$

в) $2 \sin (k + l) \cdot \sin (k - l);$

г) $\sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 6^\circ;$

д) $4 \sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ;$

е) $4 \sin 12^\circ \cdot \sin 14^\circ \cdot \sin 16^\circ;$

ж) $4 \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ;$

з) $8 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ;$

и) $8 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A;$

к) $8 \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \cos 8.$

761. Найдите значение выражения:

а) $\sin 50^\circ \cdot \sin 15^\circ$;

г) $\sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

б) $\sin 33^\circ \cdot \cos 47^\circ$;

д) $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$;

в) $\sin 12^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 10^\circ$;

е) $\cos 75^\circ \cdot \sin 105^\circ$.

762. Представьте произведением выражение:

а) $1 + \cos z$;

ж) $\sin a + \operatorname{tg} a$;

б) $1 - \cos y$;

з) $\operatorname{ctg} x + \cos x$;

в) $1 + \sin z$;

и) $1 - 2 \sin^2 a$;

г) $1 - \sin t$;

к) $1 - 2 \cos^2 b$;

д) $\sin a - \operatorname{tg} a$;

л) $1 + 2 \cos z$;

е) $\operatorname{ctg} b - \cos b$;

м) $1 - 2 \cos t$.

763. Вычислите:

а) $l \sin 2a + k \cos 2a$, учитывая, что $\operatorname{tg} a = \frac{l}{k}$;

б) $\cos(a + b)$ и $\sin(a + b)$, учитывая, что $\sin a + \sin b = s$ и $\cos a + \cos b = t$.

764. Постройте сечение призмы, изображённой на рисунке 318, плоскостью MNK .

765. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, изображённой на рисунке 319, плоскостью, которая проходит через точку M на ребре AA_1 и пересекает плоскость основания по прямой m .

766. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, изображённой на рисунке 320, плоскостью, которая проходит через точку M на грани AA_1B_1B и пересекает плоскость основания по прямой l .

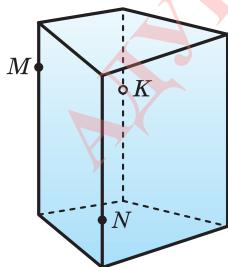


Рис. 318

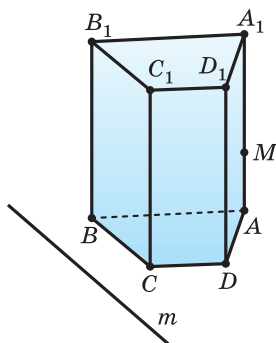


Рис. 319

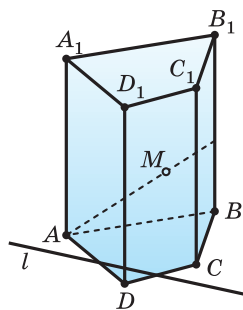


Рис. 320

767. Найдите больший корень уравнения:

а) $1 - \frac{25}{x^2} = \frac{24}{x}$; в) $(x + 0,5)(x^2 - 9) = (2x + 1)(x + 3)^2$;

б) $x - 1 = \frac{12}{x}$; г) $\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$.

768. Найдите среднее арифметическое корней уравнения:

а) $7 - 2x = \frac{3}{x}$;

б) $\frac{4}{x} + 5 = \frac{1}{x^2}$;

в) $(2x + 8)^2(13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3)$;

г) $\frac{x^3 + 64}{16 + 4x} = 11 - \frac{x}{4}$.

769. Когда собрали урожай пшеницы с двух полей площадью 48 га и 36 га, то оказалось, что средняя урожайность равна 37 ц/га. Сколько зерна собрали с каждого поля, учитывая, что урожайность на втором поле оказалась на 12 ц/га меньше?

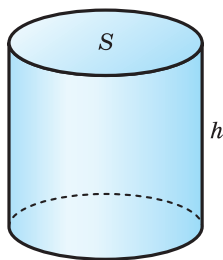


Рис. 321

770. Площадь основания цилиндра с высотой 14 см на 23 см^2 меньше площади основания другого цилиндра с высотой 9 см. Найдите объёмы цилиндров, учитывая, что их суммарный объём равен 759 см^3 , и объём V цилиндра, площадь S его основания и высота h связаны формулой $V = Sh$ (рис. 321).

771. На отрезке MN выбрали такую точку A , что $AN - AM = 5 \text{ см}$, и на отрезках-частях AM и AN как на высотах построили конусы с площадями оснований, равными 24 см^2 и 36 см^2 соответственно (рис. 322). Найдите объёмы конусов, учитывая, что суммарный их объём равен 220 см^3 , и объём V конуса, площадь S его основания и высота h связаны формулой $V = \frac{1}{3}Sh$.

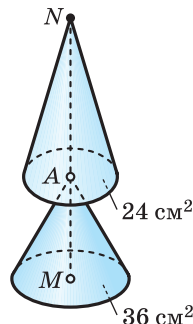


Рис. 322

772. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-d)^2} + \sqrt{d^2 + (1-a)^2}.$$

773. Площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 2. Найдите диагональ AC , учитывая, что длина ломаной $ABDC$ не превосходит 4.

774. Найдите разность между наибольшим и наименьшим кратными 11 десятизначных чисел, в десятичной записи которых цифры не повторяются.

15. Преобразования тригонометрических выражений

С введением действий нахождения значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса порождается новый класс выражений.

Тригонометрическим выражением называется выражение, содержащее переменные под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Например, выражения

$$\cos x, \quad t - 2 + \cos^2 2t$$

являются тригонометрическими, а выражения

$$\operatorname{tg}^2 2 + 7 \cos \frac{\pi}{8} + 3, \quad y^2 - \cos \frac{12}{13} + 1$$

тригонометрическими не являются: первое из них не содержит переменных, а второе хотя и содержит переменную y , но не под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

При преобразованиях тригонометрических выражений используют свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса, доказанные выше тригонометрические формулы, а также свойства действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня.

Пример 1. Упростим числовое выражение

$$\cos \frac{7\pi}{9} \sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{17\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18}.$$

Сначала, используя формулы приведения, приведём выражения $\cos \frac{7\pi}{9}$, $\sin \frac{17\pi}{18}$ и $\cos \frac{17\pi}{18}$ к равным им выражениям с аргументами из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos \frac{7\pi}{9} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\cos \frac{2\pi}{9};$$

$$\sin \frac{17\pi}{18} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{18} \right) = \sin \frac{\pi}{18};$$

$$\cos \frac{17\pi}{18} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{18} \right) = -\cos \frac{\pi}{18}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \cos \frac{7\pi}{9} \sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{17\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} = \\ & = -\cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} - \left(-\cos \left(\frac{\pi}{18} \right) \right) \cos \frac{5\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} - \\ & - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18} \right) - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \\ & = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \sin \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Упростим числовое выражение

$$\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ.$$

Структура выражения $\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$ подсказывает, что его можно преобразовать в правую часть какой-либо формулы сложения. Действительно, если его умножить и разделить на 2, то получим выражение $2 \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ \right)$, в котором числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно заменить равными им числами $\cos 60^\circ$ и $\sin 60^\circ$. С учётом этого последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ \right) = \\ &= 2 (\cos 60^\circ \sin 15^\circ - \sin 60^\circ \cos 15^\circ) = \\ &= -2 (\sin 60^\circ \cos 15^\circ - \cos 60^\circ \sin 15^\circ) = \\ &= -2 \sin (60^\circ - 15^\circ) = -2 \sin 45^\circ = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно преобразовать любое выражение вида $a \sin t + b \cos t$.

Теорема 12. Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, то

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + u),$$

$$\text{где } \cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \sin u = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказательство. Пусть a, b, t — действительные числа, причём $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ и

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right).$$

Теперь обратим внимание на то, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Это означает, что точка

$M \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ принадлежит

тригонометрической окружности (рис. 323). Пусть u — число, которому соответствует точка M . Тогда истинны равенства:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos u; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin u.$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin t \cos u + \cos t \sin u) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + u). \end{aligned}$$

Доказанная формула называется *формулой вспомогательного угла*.

Отметим, что на практике на заключительном этапе преобразования выражений вида $a \sin t + b \cos t$ не обязательно пользоваться именно формулой синуса суммы, можно использовать любую из формул сложения.

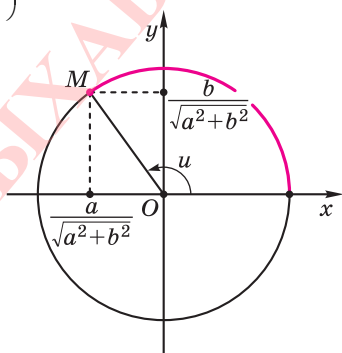


Рис. 323

Пример 3. Представим произведением выражение

$$\sin x + \cos x.$$

Поскольку $a = 1$ и $b = 1$, то $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, и потому получаем:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 4. Найдём значение выражения $\frac{\sin^3 z + 2 \cos^2 z \sin z}{\sin z + 2 \cos z}$, учитывая, что $\operatorname{ctg} z = -4$.

Поскольку $\sin z \neq 0$, то будем последовательно получать:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 z + 2 \cos^2 z \sin z}{\sin z + 2 \cos z} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\sin^3 z \left(1 + 2 \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \right)}{\sin z \left(1 + 2 \frac{\cos z}{\sin z} \right)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{\sin^2 z (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z)}{(1 + 2 \operatorname{ctg} z)} \stackrel{(3)}{=} \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2 \operatorname{ctg} z)}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали: (1) — вынесение в числителе множителя $\sin^3 z$, в знаменателе — множителя $\sin z$; (2) — сокращение дроби на $\sin z$; (3) — тождество $\sin^2 z = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 z}$.

Полученное выражение зависит от $\operatorname{ctg} z$, значение которого по условию равно -4 . Поэтому

$$\frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2 \operatorname{ctg} z)} = \frac{1 + 2 \cdot (-4)^2}{(1 + (-4)^2)(1 + 2 \cdot (-4))} = \frac{33}{17 \cdot (-7)} = -\frac{33}{119}.$$

Пример 5. Вычислим значение выражения

$$\operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ.$$

Обратим внимание на то, что аргументы первого и третьего слагаемых, а также второго и четвёртого слагаемых вместе составляют 90° . Это подсказывает выполнить соответствующую группировку слагаемых данной алгебраической суммы и затем дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ = \\ &= (\operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ) - (\operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 63^\circ) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} + \frac{\cos 81^\circ}{\sin 81^\circ} \right) - \left(\frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ} + \frac{\cos 63^\circ}{\sin 63^\circ} \right) = \\
&= \frac{\sin 81^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \sin 9^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \\
&= \frac{\sin(81^\circ + 9^\circ)}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin(63^\circ + 27^\circ)}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \\
&= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{2}{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{2}{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2 \frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 2 \frac{2 \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2} \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \\
&= 4 \frac{\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4 \frac{\cos 36^\circ}{\cos(90^\circ - 54^\circ)} = 4.
\end{aligned}$$

Пример 6. Упростим выражение-произведение

$$\cos y \cos 2y \cos 4y \cos 8y.$$

Обращает на себя внимание то, что аргумент каждого множителя вдвое меньше аргумента следующего множителя. Здесь можно использовать умножение и деление выражения на $2 \sin y$:

$$\begin{aligned}
&\cos y \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{2 \sin y} (2 \sin y \cos y) \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{2 \sin y} \sin 2y \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{4 \sin y} (2 \sin 2y \cos 2y) \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{8 \sin y} (2 \sin 4y \cos 4y) \cos 8y = \\
&= \frac{1}{16 \sin y} (2 \sin 8y \cos 8y) = \frac{\sin 16y}{16 \sin y}.
\end{aligned}$$

Пример 7. Найдём значение выражения-суммы

$$\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}.$$

Особенностью данного выражения является то, что аргумент A очередного слагаемого $\cos A$ на $\frac{2\pi}{11}$ больше аргу-

мента предыдущего слагаемого. Здесь можно использовать умножение и деление выражения на $2 \sin \frac{\pi}{11}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{6\pi}{11} + \right. \\ & \left. + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{8\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{10\pi}{11} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} - \right. \\ & \left. - \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{5\pi}{11} - \sin \frac{5\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} + \sin \frac{9\pi}{11} - \sin \frac{9\pi}{11} + \sin \frac{11\pi}{11} \right) = \\ & = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{11} + 0 \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 8. Докажем, что

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{5\pi}{12} \cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2v.$$

Будем последовательно преобразовывать левую часть данного равенства:

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{5\pi}{12} \cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) \stackrel{(1)}{=} \\ & \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) + \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) \right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) - 1 + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(\frac{5\pi}{12} - 2v - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12} + 2v + \frac{\pi}{12}\right) \right) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left(\sin 2v + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2v\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right) \right) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \left((\sin 2v + \sin 2v) + \left(\cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) \right) \right) \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} (2 \sin 2v + 0) = \sin 2v. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали: (1) — формулы понижения степени и формулу произведения косинусов; (2) — вынесение множителя $\frac{1}{2}$ за скобки и раскрытие скобок; (3) — форму-

лу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right)$ и приведение подобных;

(4) — формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right)$, тождество $\cos(-t) = \cos t$ и группировку слагаемых алгебраической суммы; (5) — приведение подобных.

Пример 9. Найдём $\sin 18^\circ$.

Учтём, что $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. Теперь перейдём к углу 18° , учитывая, что

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \quad \text{и} \quad \cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t.$$

Значит:

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ;$$

$$2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3;$$

$$2 \sin 18^\circ = 4 (1 - \sin^2 18^\circ) - 3;$$

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Получили, что число $\sin 18^\circ$ — один из корней квадратного уравнения $4x^2 + 2x - 1 = 0$, которые определяются

выражением $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Учитывая, что $\sin 18^\circ > 0$, имеем:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$



1. Какое выражение называется тригонометрическим?
2. Какая есть связь между значениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса чисел t и $-t$?
3. Как связаны между собой синус, косинус, тангенс, котангенс одного числа?
4. Запишите формулы сложения для синуса, косинуса и тангенса суммы и разности двух чисел.
5. Сформулируйте мнемоническое правило, позволяющее записать любую из формул приведения.
6. Запишите: для синуса и косинуса формулы двойного аргумента, формулы половинного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования в произведение суммы синусов, разности синусов, суммы косинусов и разности косинусов; формулы преобразования в сумму произведения синусов; произведения косинусов, произведения синуса и косинуса.
7. Запишите формулы, выражающие синус, косинус и тангенс даного аргумента через тангенс вдвое меньшего аргумента.
8. Запишите формулу вспомогательного угла.

775. Выразите в радианах угол α , равный -210° , и найдите:

- а) $\sin \alpha$; д) $\sin 2\alpha$; и) $\sin \frac{1}{2}\alpha$; н) $\sin 3\alpha$;
 б) $\cos \alpha$; е) $\cos 2\alpha$; к) $\cos \frac{1}{2}\alpha$; о) $\cos 3\alpha$;
 в) $\operatorname{tg} \alpha$; ж) $\operatorname{tg} 2\alpha$; л) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$; п) $\operatorname{tg} 3\alpha$;
 г) $\operatorname{ctg} \alpha$; з) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; м) $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha$; р) $\operatorname{ctg} 3\alpha$.

776. Найдите значение выражения:

- а) $4 \sin 45^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ - 3 \cos 45^\circ$;
 б) $2 \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ + \sin 60^\circ - 6 \cos 90^\circ$;
 в) $\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 30^\circ - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos 60^\circ$;

г) $\sqrt{1 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{\left(1 - 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$;

д) $\frac{6 \sin 30^\circ \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2 30^\circ}$;

е) $\frac{1 - \cos^2 30^\circ}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1}$;

ж) $\left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| + \left| \frac{\pi}{3} - \sqrt{2} \right| + \left| \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right|$;

з) $\left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \right| + \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right|$.

777. Определите знак числа:

а) $\sin 1001^\circ \cos 1989^\circ \operatorname{ctg} 811^\circ$;

е) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}}$;

б) $\operatorname{ctg}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$;

ж) $\operatorname{tg}(\pi\sqrt{10})$;

в) $\cos 10^\circ \sin 145^\circ \operatorname{tg} 250^\circ \operatorname{ctg} 95^\circ$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$;

г) $\cos 22$;

и) $\operatorname{tg} |\cos 1 - \sin 1|$.

д) $\sin\left(\frac{8\pi}{3} + \sqrt{2}\right)$;

778. Сравните числа:

а) $\sin 10$ и $\sin 11$;

д) $\operatorname{ctg}(\pi\sqrt{2})$ и $\operatorname{ctg}(\pi\sqrt{3})$;

б) $\sin 3$ и $\cos 5$;

е) $\sin 5$ и $\cos 3$;

в) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 3$;

ж) $\sqrt{1 + 2 \sin \frac{\pi}{5}}$ и $\cos \frac{\pi}{5}$;

г) $\cos 10$ и $\cos 11$;

з) $\sin 5$ и $\operatorname{tg} 3$.

779. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos 71^\circ \cos 334^\circ + \cos 19^\circ \cos 64^\circ}{\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg} 17^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4 \operatorname{ctg} 34^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 65^\circ \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ}$;

д) $\frac{2(\sin 166^\circ + \sin^2 38^\circ)}{1 - \cos^2 52^\circ}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{ctg} 55^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 55^\circ}$;

е) $\frac{\operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{ctg} 80^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ}$.

780. Учитывая, что $\pi < a < 2\pi$, упростите выражение

$$\frac{\sqrt{2 \sin a - \sin 2a}}{\sqrt{2 \sin a + \sin 2a}}.$$

781. Упростите выражение:

а) $2 \cos 50^\circ - 3 \sin 340^\circ - 2 \sin 40^\circ + 3 \cos 110^\circ$;

б) $\sqrt{\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi+x}{2}\right)\right) \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi+x}{2}\right) - 1\right)}$, где $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) $\sqrt{\frac{1 + \sin(y + \pi)}{1 - \sin(y - \pi)}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}}$, где $y \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

г) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos(\pi - t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$;

д) $\frac{\sin^3\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - b)}{\operatorname{ctg}^3\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(b - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

е) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)}{\cos(\pi + v) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - u)}$.

782. Упростите выражение:

$$a) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \beta) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\sin(\beta - \pi) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)};$$

$$b) \frac{\operatorname{tg} 615^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ}{\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ};$$

$$б) \frac{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} + \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{18}}{\cos 19^\circ \sin 79^\circ - \sin 11^\circ \cos 71^\circ};$$

$$г) \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

783. Учитывая, что:

$$a) \operatorname{tg} z = 2, \text{ найдите } \sin 2z, \cos 2z \text{ и } \operatorname{tg} 2z;$$

$$б) \operatorname{ctg} t = 3, \text{ найдите } \frac{\sin^3 a + 2 \cos^2 a \sin a}{\sin a + 2 \cos a};$$

$$в) \operatorname{tg} c - \operatorname{ctg} c = -3, \text{ найдите } \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{ctg}^2 c;$$

$$г) x + y = \frac{3\pi}{4}, \text{ найдите } (1 + \operatorname{ctg} x)(1 + \operatorname{ctg} y).$$

784. Упростите выражение:

$$a) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) \operatorname{tg}(5\pi - a) + \sin(a - 2\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$б) \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right);$$

$$в) \sin^2 u + \cos\left(\frac{\pi}{3} - u\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - u\right);$$

$$г) 1 + \cos 2y \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - y\right) - \sin 2y;$$

$$д) \operatorname{tg} b + 2 \operatorname{ctg} 2b - \operatorname{ctg} b;$$

$$е) \frac{1 - 2 \sin^2 v}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + v\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right)};$$

$$ж) \operatorname{ctg} t - 2 \operatorname{tg} 2t - \operatorname{tg} t - 4 \operatorname{ctg} 4t;$$

$$з) \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \lambda + (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \lambda) \operatorname{ctg}(\gamma + \lambda);$$

$$и) \frac{\sin^3\left(z - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(3z - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(z - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(z + \frac{\pi}{3}\right)};$$

$$к) \frac{\cos i + \sin 2i}{1 - \cos 2i + \sin i} - \operatorname{ctg} i.$$

785. Докажите, что если α, β, γ — внутренние углы треугольника, то:

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2$.

786. Упростите выражение:

а) $\cos^2 \left(\frac{17\pi}{8} - x \right) - \sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} - x \right)$;

б) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - a \right) - \left(\cos \frac{5\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + 2a \right)$;

в) $\sin^6 s + 3 \sin^2 s \cos^2 s + \cos^6 s$;

г) $3(\sin^4 t + \cos^4 t) - 2(\sin^6 t + \cos^6 t)$;

д) $\frac{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a - 6}{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a + 2}$;

е) $\frac{\sin r - 3 \sin 2r + \sin 3r}{\cos r - 3 \cos 2r + \cos 3r}$;

ж) $\sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right) \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{y}{2} - 1\right)}$;

з) $\sqrt{(1 - \sin x \sin y)^2 - \cos^2 x \cos^2 y}$;

и) $\sqrt{(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u + \sin v)^2}$;

к) $\frac{\left(\operatorname{tg}^2 \left(w - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - w\right)\right) \cos^2 2w}{\sin 2w}$;

л) $2 \frac{\cos^4 p + \sin^4 p}{1 + \cos^2 2p} - \frac{2 \cos^2 p - 1}{\cos^4 p - \sin^4 p}$.

787. Докажите тождество:

а) $(1 + \operatorname{tg} x) \cos^3 x + (1 + \operatorname{ctg} x) \sin^3 x = \sin x + \cos x$;

б) $\operatorname{ctg} 2y \operatorname{ctg} 6y - \operatorname{ctg} 4y \operatorname{ctg} 2y + \operatorname{ctg} 4y \operatorname{ctg} 6y = -1$;

в) $1 + \cos u + \cos v + \cos(u + v) = 4 \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \cos \frac{u+v}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 \left(a - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}^2 \left(a + \frac{\pi}{3}\right) = 6 + 9 \operatorname{ctg}^2 3a$;

д) $\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 \left(t - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos^2 \left(t - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{9}{\cos^2 3t}$;

е) $(\sin r - \sin s)(\sin r + \sin s) = \sin(r - s) \sin(r + s)$;

$$\text{ж)} \frac{\cos^3 a - \cos 3a}{\sin^3 a + \sin 3a};$$

$$\text{з)} \frac{\sin b + \sin 3b + \sin 5b + \sin 7b}{\cos b - \cos 3b + \cos 5b - \cos 7b} = \operatorname{ctg} b;$$

$$\text{и)} \frac{\sin^2(c+d) + \sin^2(c-d)}{\cos^2 c \cos^2 d} = \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 d;$$

$$\text{к)} 4 \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x.$$

788. Докажите, что:

$$\text{а)} \text{ если } a + b + c = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c = 1;$$

$$\text{б)} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos\left(2t + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2t;$$

$$\text{в)} \cos 3v = -4 \cos v \cos\left(v + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(v + \frac{2\pi}{3}\right).$$

789. Вычислите:

$$\text{а)} \sin^2 \frac{\pi}{8} + 3 \cos^2 \frac{3\pi}{8};$$

$$\text{б)} \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ;$$

$$\text{в)} (\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ)(\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ);$$

$$\text{г)} \sin^2 58^\circ + \cos 56^\circ \frac{\sin 13^\circ}{\sin 17^\circ} + 2 \sin^2 74^\circ (1 - \cos 32^\circ) + \\ + \cos 56^\circ \frac{\cos 13^\circ}{\cos 17^\circ}.$$

790. Упростите:

$$\text{а)} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7};$$

$$\text{б)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9};$$

$$\text{в)} \sin^2 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 47^\circ + \cos^2 47^\circ;$$

$$\text{г)} \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16};$$

$$\text{д)} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{4\pi}{9};$$

$$\text{е)} \frac{(\cos 5^\circ - \sin 5^\circ)^2}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$$

791. Упростите выражение:

$$\text{а)} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5};$$

б) $\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10}$;

в) $\frac{(\sqrt{3} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ)(\sqrt{3} + 1)}{8 \sin 75^\circ}$;

г) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$;

д) $\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 65^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 65^\circ$;

е) $\frac{1 - \sin 4^\circ}{1 + \cos 94^\circ} + \frac{\sin 82^\circ}{\sqrt{3} \cos 22^\circ + \sin 22^\circ}$.

792. Преобразуйте в произведение:

а) $\left(1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 3a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right) \cos a$;

б) $\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos^2 b + \sin 2b$;

в) $3 - 4 \cos 2c + \cos 4c - 8 \cos^4 c$;

г) $\cos^2 z - 2 \cos z \cos t \cos(z - t) + \cos^2 t$;

д) $\frac{2 \sin 2f}{\left(\sin^2\left(\frac{f}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{f}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos f}$;

е) $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y)$;

ж) $\sin 4d - \sin 2d + \sin d$;

з) $\operatorname{tg}(i - j) + \operatorname{tg}(j - k) + \operatorname{tg}(k - i)$;

и) $1 + \frac{1}{2 \sin^2 l} + \frac{4 \sin^2 l - 1}{\sin 2l} \operatorname{ctg} l$;

к) $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} e} + \sqrt{\operatorname{tg} e}}{\sqrt{\operatorname{ctg} e} - \sqrt{\operatorname{tg} e}}$.

793. Докажите, что если α , β , γ — внутренние углы треугольника, то:

а) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$;

б) $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin \beta}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} = 2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)$;

в) $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2$;

г) $8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1$;

д) $\cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$.

794. Докажите, что:

а) если $x + y + z = \frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z =$
 $= \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$;

б) для того, чтобы один из углов ε , η , λ треугольника был равен 60° , необходимо и достаточно, чтобы $\sin 3\varepsilon + \sin 3\eta + \sin 3\lambda = 0$.

795. Докажите, что:

а) если углы α , β , γ треугольника удовлетворяют равенству $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то этот треугольник прямоугольный;

б) для того, чтобы один из углов α , β , γ треугольника был равен 36° или 108° , необходимо и достаточно, чтобы $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$.

796. Найдите значение выражения:

а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ$;

в) $4 \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;

г) $\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$;

д) $14 \sin 10^\circ - \frac{7\sqrt{3}}{2 \cos 50^\circ}$;

е) $\frac{9 \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{13\pi}{30}}{\sin \frac{4\pi}{15}}$.

797. Найдите значение выражения:

а) $16 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{3a}{2}$, учитывая, что $\cos a = \frac{3}{4}$;

б) $\sin^6 b + \cos^6 b$, учитывая, что $\cos 2b = t$;

в) $\operatorname{tg}(c + 2d)$, учитывая, что $\operatorname{tg} c = \frac{1}{7}$ и $\sin d = \frac{1}{\sqrt{10}}$;

г) $\operatorname{tg}^4 t + \operatorname{ctg}^4 t$, учитывая, что $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = a$;

д) $\sin(2u - v)$, учитывая, что $\operatorname{tg} u = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} v = \frac{3}{4}$, $u \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

$v \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\frac{3 \cos x + 4 \sin x}{3 \cos x - \sin x}$, учитывая, что $1 + 8 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 0$.

798. Преобразуйте в произведение выражение $\cos x + \cos(x+y) \cdot \cos z + \cos y - \sin(y+z) \sin z + \cos z$.

799. Найдите значение выражения:

- а) $\cos\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(3 \operatorname{arctg} 2)$;
 б) $\sin\left(3 \arccos \frac{3}{5}\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13}\right)$;
 в) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$; е) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + 2 \operatorname{arctg} 2\right)$.

800. Вычислите:

- а) $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right)$;
 б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,3\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

801. Найдите значения выражений $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ и $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$ и докажите, что $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

802. Учитывая, что $\sin \alpha + \sin \beta = x$, $\cos \alpha + \cos \beta = y$ и $x^2 + y^2 \neq 0$, найдите $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$.

803. Найдите значение выражения:

- а) $\sin 37^\circ \cos 61^\circ + \sin 61^\circ \cos 159^\circ + \sin 159^\circ \cos 119^\circ + \sin 119^\circ \cos 37^\circ$;
 б) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$;
 в) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$;
 г) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$;
 д) $\cos 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \dots \cdot \cos 75^\circ \cdot \cos 85^\circ$.

804. Упростите выражение:

- а) $(2 \cos x - 1)(2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos (2^m x) - 1)$;
 б) $\sin a + 2 \sin 2a + 3 \sin 3a + \dots + m \sin ma$;
 в) $\sin^3 t \cos 3t + \cos^3 t \sin 3t$;
 г) $\frac{\sin 4a + \sin 5a + \sin 6a}{\cos 4a + \cos 5a + \cos 6a}$;
 д) $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{8} \dots \cos \frac{a}{2^m}$;
 е) $\sqrt{1 + 2 \cos \frac{\pi}{5}} + \sqrt{1 + 2 \cos \frac{3\pi}{5}}$;
 ж) $\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$;
 з) $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}$.

805. Докажите, что:

а) если $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots =$
$$= \frac{\sqrt{2} \cos x}{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)};$$

б) выражение $Q = \cos^2\left(a + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) +$
 $+ \cos^2\left(a - \frac{\pi}{6}\right)$ при всех значениях переменной a принимает
одно и то же значение, и найдите это значение.

806. Определите, при каких значениях переменной a истинно равенство

$$\cos a + \cos 3a + \dots + \cos ((2n - 1)a) = \frac{\sin(2na)}{2 \sin a}.$$

807. Есть два прямоугольных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с катетами A_1C_1 и A_2C_2 , равными соответственно 6 и 5, причём гипотенуза A_1B_1 на 3 меньше гипотенузы A_2B_2 . Найдите синусы углов B_1 и B_2 этих треугольников, учитывая, что их сумма равна $\frac{5}{6}$.

808. Верно ли утверждение:

а) если две точки окружности принадлежат плоскости, то окружность лежит в этой плоскости;

б) если три точки окружности принадлежат плоскости, то окружность лежит в этой плоскости?

809. Есть прямая a и точка G , не лежащая на ней. Докажите, что все прямые, проходящие через точку G и пересекающие прямую a , лежат в одной плоскости.

810. Все рёбра правильной треугольной призмы $BDFACE$ равны друг другу, а площадь её основания равна $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. Найдите длину пространственной ломаной $BDEFB$.

811. Точки U и V — центры смежных граней AA_1C_1C и $A_1C_1E_1G_1$ куба $ACEGA_1C_1E_1G_1$, ребро которого равно l . Найдите расстояние между точками U и V .

812. Точка K делит пополам боковое ребро AR правильной четырёхугольной пирамиды $APQRS$. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что её боковое ребро равно 16 см, а отрезок QK — 12 см.

813. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, периметр которого равен 64 см, а разность периметров различных треугольников, на которые разделяется параллелограмм его диагоналями, — 16 см. Найдите диагонали боковых граней призмы, учитывая, что её боковая поверхность равна 640 см^2 .

814. Велосипедист от Слонома до Зельвы ехал со скоростью на $2\frac{2}{3}$ км/ч меньшей, чем от Зельвы до Волковыска (рис. 324). Определите время нахождения велосипедиста в дороге на второй части пути, учитывая, что средняя скорость движения на всём пути оказалась равной 15 км/ч.



Рис. 324

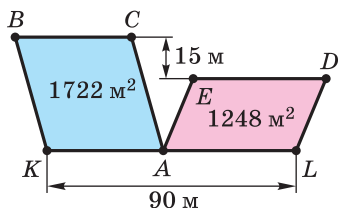


Рис. 325

815. На отрезке KL длиной 90 м выбрана точка A , и на отрезках-частях AK и AL как на основаниях построены параллелограммы $AKBC$ и $ALDE$ с площадями 1722 м^2 и 1248 м^2 соответственно (рис. 325). Найдите длину отрезка AK , учитывая, что высота первого параллелограмма на 15 м больше.

816. Можно ли разрезать квадрат на три друг другу подобных и неравных прямоугольника?

817. На промежутке $[0; 1]$ выбираются числа $x_1, x_2, \dots, x_{2008}$. Определите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2008} - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{2007}x_{2008} - x_{2008}x_1.$$

818. Некоторые выпуклые n -угольники можно разрезать на квадраты и правильные треугольники (рис. 326). Найдите все значения переменной n .

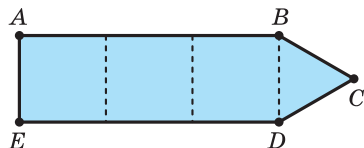


Рис. 326



Перпендикулярность прямых и плоскостей

16. Перпендикулярность прямой и плоскости

Напомним, что *перпендикулярными* называют прямые, угол между которыми равен 90° . Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися. На рисунке 327 перпендикулярные прямые a и p пересекаются, а перпендикулярные прямые a и q скрещиваются.

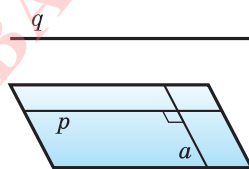


Рис. 327

Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a плоскости α записывают так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что и плоскость α перпендикулярна прямой a , и пишут $\alpha \perp a$.

Если прямая l лежит в плоскости β или параллельна ей, то в плоскости β есть прямые, параллельные прямой l . Поэтому прямая, перпендикулярная плоскости, обязательно эту плоскость пересекает.

Окружающее пространство даёт много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Столбы с осветительными лампами и колонны устанавливают перпендикулярно горизонтальной поверхности земли (рис. 328 и 329).

Из теоремы 6 параграфа 8 следует, что при отыскании угла между прямыми их можно заменять параллельными прямыми. Поэтому если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая также перпендикулярна этой плоскости. Верно и обратное утверждение.

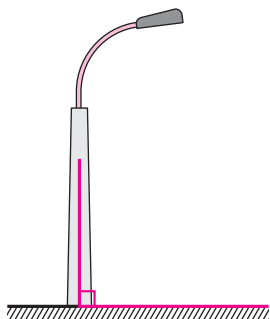


Рис. 328

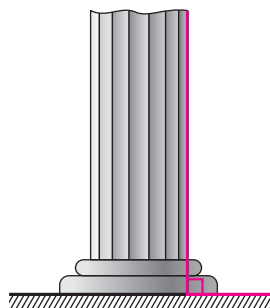


Рис. 329

Теорема 1. *Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны друг другу.*

Доказательство. Пусть прямые x и y обе перпендикулярны плоскости α (рис. 330). Докажем, что прямые x и y параллельны друг другу.

Через какую-либо точку M прямой x проведём прямую x_1 , параллельную прямой y . Тогда $x_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая x_1 совпадает с прямой x . Допустим, что это не так. Тогда получается, что в плоскости β , заданной прямыми x и x_1 , через точку M проведены две прямые, перпендикулярные прямой a , по которой пересекаются плоскости α и β , что невозможно. Значит, прямые x и y параллельны.

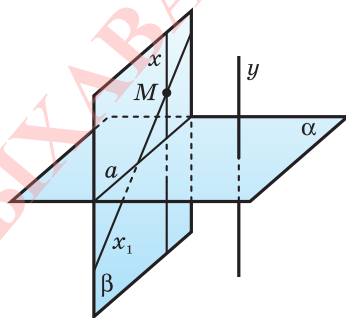


Рис. 330

Установим признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 2. *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямая p пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна пересекающимся прямым a и b , лежащим в плоскости α (рис. 331). Докажем, что прямая p перпендикулярна плоскости α , т. е. что прямая p перпендикулярна прямой t , произвольно выбранной в плоскости α .

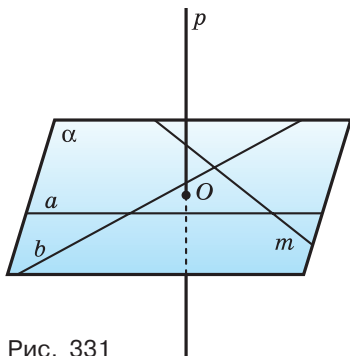


Рис. 331

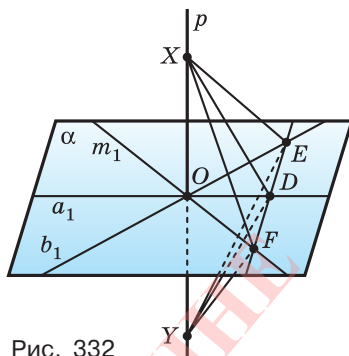


Рис. 332

Проведём через точку O прямые a_1 , b_1 и m_1 , соответственно параллельные прямым a , b и m . В плоскости α проведём какую-либо прямую так, чтобы она пересекала прямые a_1 , b_1 и m_1 в точках D , E , F (рис. 332). На прямой p отметим точки X и Y на одинаковых расстояниях от точки O . Прямые a_1 и b_1 — серединные перпендикуляры к отрезку XY , поэтому $DX = DY$ и $EX = EY$. Значит, треугольники XDE и YDE равны по трём сторонам, а поэтому углы XEF и YEF равны. Учитывая это, получим, что треугольники XEF и YEF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $FX = FY$. Это означает, что треугольник XFY является равнобедренным, а поэтому его медиана FO является и высотой, т. е. прямые p и m_1 , а значит, и прямые p и m перпендикулярны.

Следствие 1. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Пусть плоскости α и β параллельные и прямая l перпендикулярна плоскости α (рис. 333). Докажем, что прямая l перпендикулярна плоскости β . Для доказательства проведём через прямую l две какие-либо плоскости γ_1 и γ_2 . Пусть они пересекают плоскость α по прямым a_1 и a_2 ,

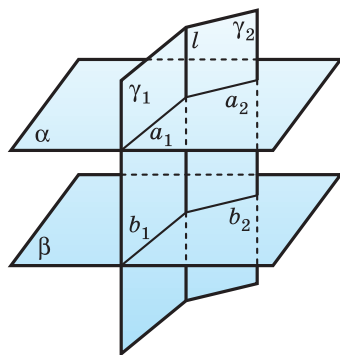


Рис. 333

а параллельную ей плоскость β — по прямым b_1 и b_2 . Поскольку $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ и $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ и $l \perp b_2$. По теореме 2 получаем, что $l \perp \beta$.

Следствие 2. *Если одной прямой перпендикулярны две плоскости, то они параллельны.*

Проведите самостоятельно обоснование этого утверждения, используя рисунок 333.

Теорема 3. *Через каждую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.*

Доказательство. Пусть даны прямая l и точка A . В случае, когда точка A не лежит на прямой l (рис. 334), через точку A проведём прямую m , перпендикулярную прямой l , и через точку B пересечения прямых m и l — ещё одну прямую n , перпендикулярную прямой l . В случае, когда точка A лежит на прямой l (рис. 335), через точку A проведём прямые m и n , перпендикулярные прямой l . Через прямые m и n проведём плоскость α . Эти плоскости и прямая l перпендикулярны по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

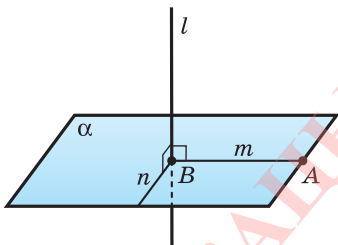


Рис. 334

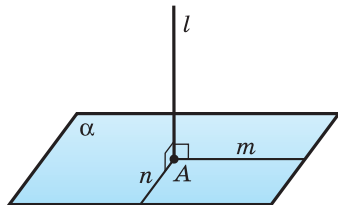


Рис. 335

Докажем теперь, что построенная плоскость α единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проведены две плоскости α_1 и α_2 , перпендикулярные прямой l (рис. 336 и 337). Через прямую l и точку A проведём какую-либо плоскость β . Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по некоторым прямым p_1 и p_2 , так как плоскость β имеет с плоскостями α_1 и α_2 общую точку A . Поскольку $l \perp \alpha_1$ и $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ и $l \perp p_2$. Получается, что в плоскости β через точку A проведены две прямые p_1 и p_2 , перпендикулярные прямой l , что невозможно.

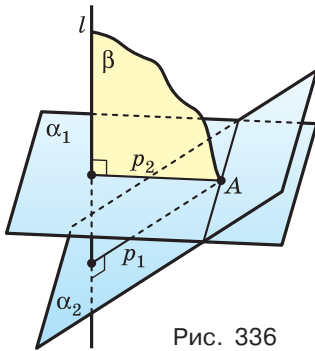


Рис. 336

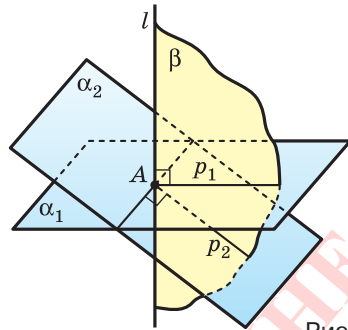


Рис. 337

Теорема 4. *Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.*

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α . Пусть a — прямая в плоскости α , а β — плоскость, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой a . Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 338). В плоскости β через точку A проведём прямую l , перпендикулярную прямой b . Прямая l — искомая, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым a и b : $l \perp b$ по построению; $l \perp a$, так как $a \perp \beta$ и l принадлежит β .

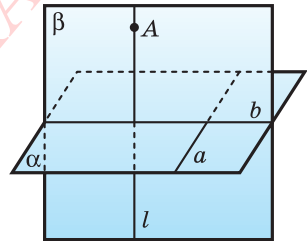


Рис. 338

Прямая l — единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проходит ещё одна прямая l_1 , перпендикулярная плоскости α (рис. 339 и 340). Тогда по теореме 1 прямые l и l_1 параллельны друг другу. Но такое невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке A .

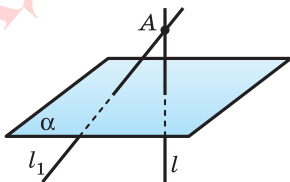


Рис. 339

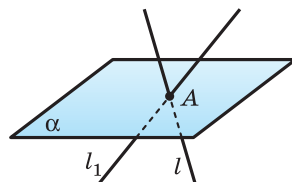


Рис. 340

Следствие 3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 341). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, то треугольник ACC_1 прямоугольный с прямым углом C . Поэтому $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А поскольку треугольник ABC также прямоугольный с прямым углом B , то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Учитывая, что $CC_1 = AA_1$ и $BC = AD$, получаем, что $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

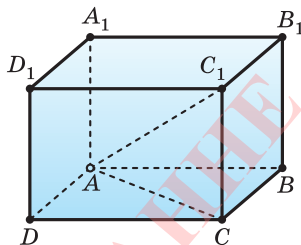


Рис. 341



1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными? Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
2. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
3. Сформулируйте свойство прямых, перпендикулярных одной плоскости.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.
6. Сформулируйте свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку.
8. Сформулируйте утверждение о прямой, перпендикулярной данной плоскости и проходящей через данную точку.

819. Есть параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что:

а) если $\angle BAD = 90^\circ$, то $CD \perp B_1 C_1$ и $AB \perp A_1 D_1$;

б) если $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1 B_1$.

820. Рёбра BC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что ребро AD перпендикулярно одной из средних линий грани ABC .

821. Укажите в своём классе модели прямых, перпендикулярных плоскости.

822. Определите, перпендикулярна ли прямая l плоскости α , учитывая, что на рисунке:

а) 342 параллельные прямые a и b лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

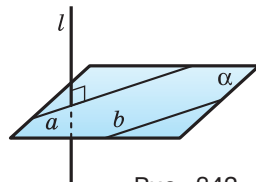


Рис. 342

б) 343 пересекающиеся прямые c и d лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

в) 344 пересекающиеся прямые m и n лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

г) 345 прямая r перпендикулярна пересекающимся прямым p и q плоскости α и прямая l параллельна прямой r .

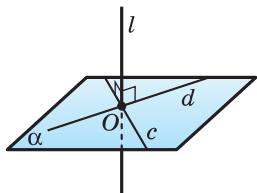


Рис. 343

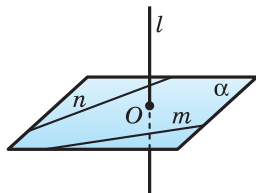


Рис. 344

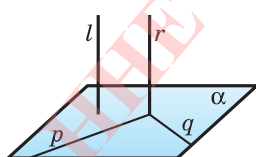


Рис. 345

823. На рёбрах F_1G_1 и FF_1 прямоугольного параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны точки A и B (рис. 346). Определите, перпендикулярны ли:

- а) прямая FG и плоскость EE_1F_1 ;
- б) прямые AB и GH ;
- в) прямые F_1G и EF .

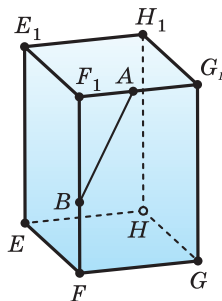


Рис. 346

824. Точки L , M и O лежат на прямой, перпендикулярной плоскости γ , а точки O , B , C и D лежат в этой плоскости. Определите, является ли прямым угол:

- а) LOB ; в) DLM , д) BMO .
- б) MOC , г) DOL ,

825. Прямая FA перпендикулярна плоскости BCF , и точка F — середина отрезка AD . Докажите, что:

- а) $AB = DB$;
- б) если $BF = FC$, то $AB = AC$;
- в) если $AB = DC$, то $BF = FC$.

826. Через центр O симметрии квадрата со стороной a проведена прямая l , перпендикулярная плоскости квадрата. Найдите расстояние от вершин квадрата до точки K прямой l , учитывая, что $OK = d$.

827. Через вершину C правильного треугольника ABC со стороной $16\sqrt{3}$ см проведена прямая k , перпендикуляр-

ная плоскости ABC , а через ортоцентр O этого треугольника — прямая l , параллельная прямой k . На прямых k и l выбраны точки D и E , отстоящие от точек C и O на 16 см и 12 см соответственно. Найдите расстояние DE и расстояния от точек D и E до вершин треугольника.

828. Через концы P и Q отрезка PQ , параллельного плоскости γ , проведены прямые, перпендикулярные этой плоскости и пересекающие её в точках P_1 и Q_1 . Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

829. Углы A и B треугольника ABC вместе составляют 90° , а прямая BD перпендикулярна плоскости ABC . Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

830. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Докажите, что прямая BD перпендикулярна:

- а) плоскости AMO ; б) прямой MO .

831. Через центр O симметрии параллелограмма $ABCD$ проведена такая прямая l , что для её точки M , отличной от O , истинны равенства $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна плоскости параллелограмма.

832. Как проверить перпендикулярность прямой и плоскости, если измерять можно только расстояния?

833. Два равных круга имеют единственную общую точку A , через которую проходят диаметры AB и AC этих кругов, причём эти диаметры не лежат на одной прямой. Определите, перпендикулярна ли плоскости ABC линия пересечения плоскостей, в которых лежат данные круги. Изменится ли вывод, если круги не будут равными?

834. На ребре HE четырёхугольной пирамиды $REFGH$, у которой боковое ребро FR перпендикулярно плоскости основания, выбрана точка A , и на отрезках AF и AR отмечены их середины B и C . Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости основания $EFGH$, и найдите угол между прямыми BC и GH .

835. Рёбра AB и AC , а также DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ равны, а точка M — середина ребра BC . Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна прямой BC .

836. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные к ней, лежат в плоскости, которая перпендикулярна прямой a и проходит через точку M .

837. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB , то он лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной прямой AB .

838. Через концы M и N отрезка, пересекающего плоскость γ в точке A , проведены прямые c и d . Эти прямые перпендикулярны плоскости γ и пересекают её в точках M_1 и N_1 соответственно (рис. 347). Докажите, что точки M_1 , N_1 и A лежат на одной прямой, и найдите отрезок MN , учитывая, что $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

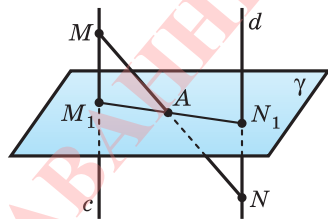


Рис. 347

839. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B , учитывая, что $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7,2$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α .

840. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите A_1B_1 , учитывая, что $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

841. В каком случае через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

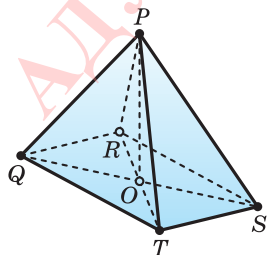


Рис. 348

842. Рёбра PQ и PS , а также PR и PT четырёхугольной пирамиды $PQRST$, основанием которой является параллелограмм, равны друг другу (рис. 348). Докажите, что отрезок, соединяющий вершину P с центром O симметрии параллелограмма, перпендикулярен основанию $QRST$.

843. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые k и

l , перпендикулярные его плоскости, а через медиану CD — плоскость, пересекающая прямые k и l в точках E и F соответственно (рис. 349). Установите:

а) чем является отрезок CD в треугольнике CEF ;

б) что если $CA = CB$, то треугольник CEF является равнобедренным.

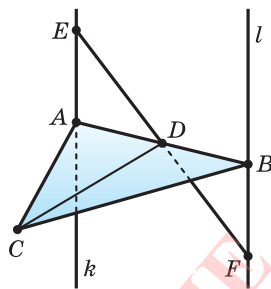


Рис. 349

844. На прямой, перпендикулярной плоскости треугольника PQR и проходящей через вершину P , выбрана точка A . На отрезке, соединяющем середину стороны QR с точкой A , отмечена такая точка T , что $AT : TP_1 = 2 : 1$. Найдите угол между прямыми:

а) GT и QR , учитывая, что G — центр тяжести треугольника PQR ;

б) GT и PQ .

845. Концы A и B отрезков AA_1 и BB_1 принадлежат плоскости α , а сами отрезки ей перпендикулярны и расположены по одну сторону от плоскости. Найдите углы четырёхугольника AA_1B_1B , учитывая, что:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) $A_1B_1 = 2AB$;

в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

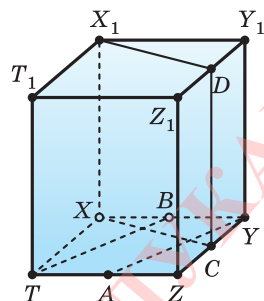


Рис. 350

846. Точки A , B , C , D являются серединами рёбер TZ , XY , YZ , Y_1Z_1 прямоугольного параллелепипеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, в основании которого лежит квадрат (рис. 350). Определите:

а) перпендикулярна ли прямая YZ плоскости сечения XX_1DC ;

б) перпендикулярна ли прямая TB плоскости XX_1D ;

в) угол между прямыми AY и XD .

847. Все грани треугольной пирамиды $IJKL$ — правильные треугольники со стороной 6 см. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра KL и перпендикулярной ему, и найдите площадь этого сечения.

848. Есть треугольная пирамида $SABC$, все рёбра которой равны друг другу. На рёбрах SC , SB , CB отмечены се-

редин U , V , Y , а на ребре SA — произвольная точка X (рис. 351). Определите:

- а) перпендикулярны ли прямые SA и UV ;
- б) перпендикулярны ли прямые UV и YX ;
- в) угол между прямыми UV и AY .

849. Есть прямоугольный треугольник EFG с прямым углом F и катетами FE и FG , соответственно равными 6 см и 8 см. От вершины F на луче, перпендикулярном плоскости треугольника, отложен отрезок FA , равный 12 см, а на гипотенузе EG отмечена её середина M (рис. 352). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AFM .

850. На рисунке 353 прямые OA , OB и OC попарно перпендикулярны. Найдите отрезок BC , учитывая, что:

- а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
- б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
- в) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
- г) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

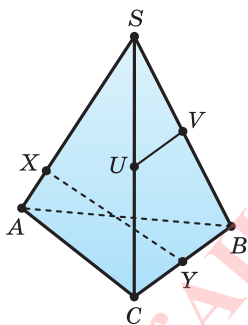


Рис. 351

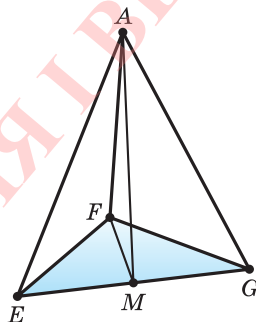


Рис. 352

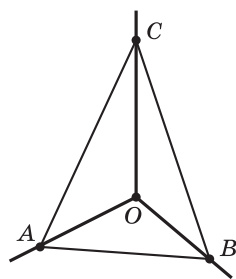


Рис. 353

851. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 9 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна $15\sqrt{2}$ см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

852. Точка Q — середина ребра KK_1 прямоугольного параллелепипеда $KL MN K_1 L_1 M_1 N_1$, точка H ребра MM_1 такова, что $MH : HM_1 = 4 : 1$. Найдите длину отрезка HQ , учитывая, что диагональ параллелепипеда равна 41 см, а диагональ его основания — 9 см.

853. Из вершины B треугольника ABC проведён отрезок BD , перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите длину этого отрезка, учитывая, что $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а сторона BC длиннее стороны BA на 4 см.

854. На прямой, перпендикулярной плоскости α и пересекающей её в точке O , выбраны две точки A и B , а на плоскости α — такая точка X , что $XA = 3$, $XB = 4$. Найдите XO , учитывая, что:

- а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

855. Боковое ребро OY треугольной пирамиды $OXYZ$ перпендикулярно плоскости её основания XYZ . Найдите это ребро, учитывая, что рёбра YX и YZ соответственно равны 27 см и 48 см и рёбра OZ и OX относятся как 4 : 3.

856. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ которого является квадратом. Найдите площадь боковой поверхности четырёхугольной пирамиды C_1CDEF , учитывая, что $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

857. Основанием треугольной пирамиды $SXYZ$ является правильный треугольник, а рёбра SZ , SX , SY взаимно перпендикулярны. Через точку Q , выбранную на ребре XZ , проведена плоскость, перпендикулярная прямой SZ . Найдите ребро SX пирамиды, учитывая, что площадь сечения равна 32 см², а $SQ = 17$ см.

858. Измерения AB , AD и диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно равны 6, 12 и 18. Точки K и K_1 выбраны на рёбрах AD и $A_1 D_1$ так, что $AK : KD = A_1 K_1 : K_1 D_1 = 1 : 5$. Докажите, что плоскость BKK_1 перпендикулярна прямой AC , и найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BKK_1 .

859. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 16 см и 28 см. Определите площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

860. Есть треугольная пирамида $QABC$, основание которой — правильный треугольник ABC , а боковые рёбра QA , QB , QC равны друг другу. Из вершины C и из такой точки X ребра AC , что $AX = 45$ см и $XC = 30$ см, проведены перпендикуляры к грани SAB . Найдите длины этих перпендикуляров, учитывая, что расстояние между их основаниями равно 18 см.

861. Есть правильная треугольная призма $MNKM_1N_1K_1$. Точки A и B — середины рёбер MK и KK_1 соответственно. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные грани MM_1N_1N и пересекающие её в точках P и Q соответственно. Найдите сторону основания и боковое ребро призмы, учитывая, что $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

862. В треугольной пирамиде $QFGH$ основание FGH — правильный треугольник, а боковые рёбра QF , QG , QH равны друг другу. Одно сечение пирамиды перпендикулярно ребру QH и проходит через вершину F , другое — параллельно ребру QH и содержит вершину G и такую точку B ребра FH , что $FB = 8$ см и $BH = 7$ см. Найдите отрезок, по которому пересекаются эти сечения, учитывая, что $QF = 12$ см.

863. Через центр O описанной около треугольника ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 354). Докажите, что каждая точка X этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

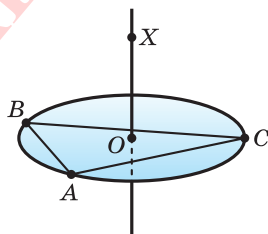


Рис. 354

864. Точка Q является центром квадратного основания $ABCD$, а точка K — серединой ребра PA четырёхугольной пирамиды $PABCD$, все рёбра которой равны 100. Начертите сечение пирамиды и найдите его площадь, учитывая, что плоскость сечения проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

- а) AC ; б) PA ; в) PQ ; г) BD .

865. Есть треугольная пирамида $PABC$, все рёбра которой равны друг другу. В ней отмечены центр Q её основания ABC и внутренняя точка K ребра PB . Сделайте соответствующий рисунок в тетради и начертите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой:

- а) BC ; б) BP ; в) BQ .

866. Точка K — середина ребра A_1B_1 единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Начертите сечение куба и найдите его периметр и площадь, учитывая, что плоскость проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

- а) DD_1 ; б) CD ; в) C_1D ; г) CD_1 ; д) BD .

867. Найдите производную функции:

а) $y = (2t + 1)^3 + 5(3t - 7)^2$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$;

б) $y = (t - 1)^4 (t + 1)^3$; ж) $y = \sqrt{t+2} - \sqrt{t-2}$;

в) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; з) $y = \sqrt[4]{(k-8)^7}$;

г) $y = \frac{2}{(x+1)^2+1}$; и) $y = \sqrt[3]{(3k+1)^2}$.

д) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+3)^3}$;

868. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(b^2 - 1)(b^3 - 1)(b^4 - 1) \geq 0$; в) $\frac{1}{b-1} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1}$;

б) $\frac{(b-3)^3(b+4)^4(b-7)}{(b-2)^2(b+1)} \leq 0$; г) $\sqrt{b^2-4}(b-3) < 0$.

869. Решите неравенство $f'(x) \leq g'(x)$, учитывая, что:

а) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$; $g(x) = 2 - 6x + 3x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 1$; $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$.

870. Докажите, что:

а) функция $y = x^5 + 6x^3$ возрастает на всей координатной прямой;

б) функция $y = \frac{4}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

871. Исследуйте функцию и постройте её график:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; в) $y = 3x - x^3$;

б) $y = x^3 - 12x$; г) $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$.

872. Докажите, что при $x \geq 0$ истинно неравенство

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geq \frac{x^4}{2}.$$

873. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой a , учитывая, что:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $a = 1$; б) $f(x) = -2x^3$, $a = 2$.

874. Есть график функции $y = x^4 - x$. Найдите уравнение касательной к этому графику:

а) в точке $x = 2$;

б) в точке его пересечения с осью ординат;

в) в точке его пересечения с осью абсцисс.

875. В сплав меди и цинка, содержащий 22 кг меди, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве увеличилось на 33 процентных пункта. Определите первоначальную массу сплава.

876. После того, как сплавляли два слитка меди, содержавших 6 кг и 12 кг меди, получили сплав с 36-процентным содержанием меди. Каким было процентное содержание меди в обоих слитках, если в первом оно было ниже на 40 процентных пунктов?

* * *

877. Решите уравнение

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

878. На продолжении биссектрисы угла BAC за вершину выбрана такая точка D , что $\angle BDC = 0,5 \angle BAC$. Найдите отрезок AD , учитывая, что $AB = b$ и $AC = c$.

879. Докажите, что если положительные числа b и c удовлетворяют неравенству $b(1 - c) > \frac{1}{4}$, то $b > c$.

17. Расстояния.

Угол между прямой и плоскостью

Пусть даны плоскость α и точка M вне её (рис. 355). Через точку M проведём прямую l , перпендикулярную плоскости α , и пусть A — точка пересечения прямой l с плоскостью α . Отрезок MA называется *перпендикуляром к плоскости*, проведённым из точки M , а точка A — *основанием перпендикуляра*.

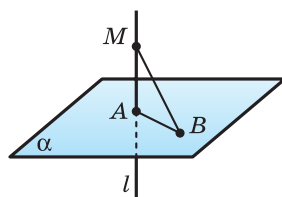


Рис. 355

Соединим точку M ещё с какой-либо точкой B плоскости α . Отрезок MB называется *наклонной к плоскости*, проведённой из точки M , а точка B — *основанием наклонной*. Отрезок AB называется *проекцией наклонной на плоскость α* .

Теорема 5. Перпендикуляр к плоскости, проведённый из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведённой из той же точки.

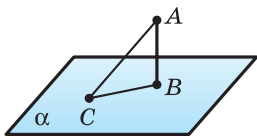


Рис. 356

Доказательство. Пусть отрезок AB на рисунке 356 — перпендикуляр, а отрезок AC — наклонная к плоскости α . Эти перпендикуляр и наклонная в прямоугольном треугольнике ABC являются соответственно катетом и гипотенузой. Поэтому $AB < AC$.

В соответствии с утверждением теоремы 5 из всех расстояний от данной точки до различных точек данной плоскости наименьшим является расстояние, измеренное по перпендикуляру.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости.

Когда мы говорим, например, что уличный фонарь находится на высоте 8 м от земли, то подразумеваем, что расстояние от фонаря до поверхности земли, измеренное по перпендикуляру, проведённому от фонаря до плоскости земли, составляет 8 м (рис. 357).

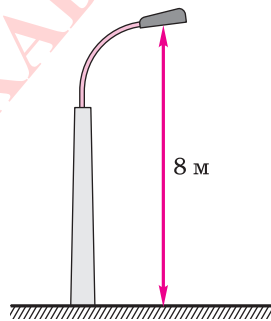


Рис. 357

Теорема 6. Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра.

Доказательство. Пусть даны параллельные плоскости α и β (рис. 358). Пусть A — какая-либо точка плоскости α , отрезок AA_1 — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости β . Возьмём произвольную точку X плоскости α и проведём из неё перпендикуляр XX_1 к плоскости β . Тогда по теореме 1 прямые AA_1 и XX_1 параллельные, а по теореме 11 из параграфа 10 отрезки AA_1 и XX_1 равны друг другу. Это означает, что расстояние от любой точки X плоскости α до плоскости β равно отрезку AA_1 . Поскольку отрезок AA_1 перпендикулярен и плоскости β , то он представляет и расстояние от точки A_1 до плоскости α . Понят-

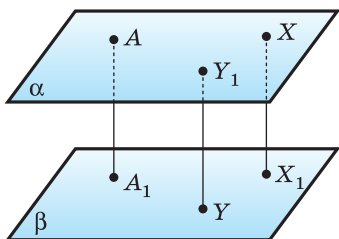


Рис. 358

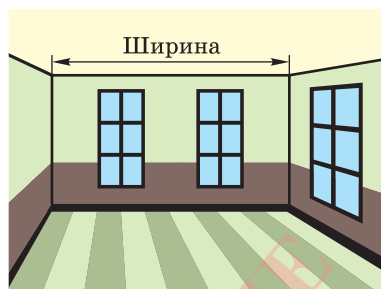


Рис. 359

но, что расстояние от любой точки Y плоскости β до плоскости α равно отрезку AA_1 .

Расстоянием между параллельными плоскостями называется длина перпендикуляра, проведённого из какой-либо точки одной плоскости к другой плоскости.

Все точки одной стены комнаты находятся на одном и том же расстоянии от противоположной стены (рис. 359). Это расстояние и есть ширина комнаты.

Теорема 7. *Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно перпендикуляру, проведённому из какой-либо точки прямой к плоскости.*

Используя рисунок 360, проведите доказательство теоремы самостоятельно.

Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется длина перпендикуляра, проведённого из какой-либо точки прямой к плоскости.

Все точки края стола находятся на одном расстоянии от пола (рис. 361). Это расстояние и есть высота стола.

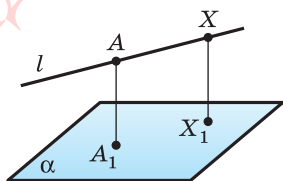


Рис. 360

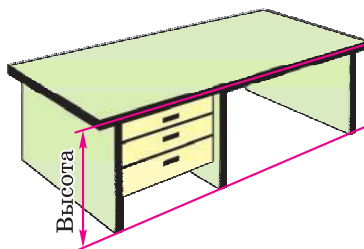


Рис. 361

Теорема 8. Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 362). Докажем, что на этих прямых можно выбрать такие точки A и B , что прямая AB перпендикулярна и прямой a , и прямой b .

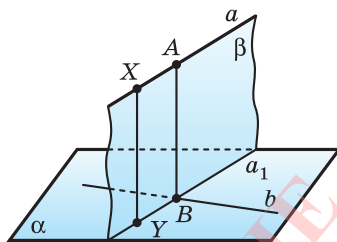


Рис. 362

Пусть α — плоскость, проходящая через прямую b параллельно прямой a . Возьмём на прямой a точку X и опустим перпендикуляр XY на плоскость α . Пусть β — плоскость, проходящая через пересекающиеся прямые a и XY . Обозначим a_1 прямую, по которой пересекаются плоскости α и β . Поскольку $a_1 \parallel a$, то прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B . В плоскости β опустим перпендикуляр BA на прямую a . Прямые AB и XY лежат в одной плоскости β и перпендикулярны к прямой a . Поэтому $AB \parallel XY$ и $AB \perp \alpha$ и, значит, $AB \perp a$ и $AB \perp b$.

Этим самым существование общего перпендикуляра скрещивающихся прямых обосновано. Докажем теперь его единственность.

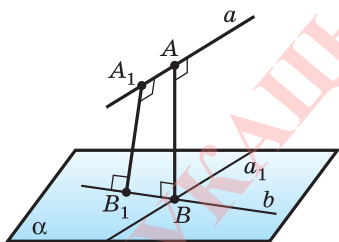


Рис. 363

Пусть скрещивающиеся прямые a и b имеют ещё один общий перпендикуляр A_1B_1 , причём точка A_1 принадлежит прямой a , а точка B_1 — прямой b (рис. 363).

Точки A и A_1 , B и B_1 совпадать не могут, так как из одной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр. По-

скольку $A_1B_1 \perp a$ и $A_1B_1 \perp b$, то прямая A_1B_1 , как и прямая AB , перпендикулярна плоскости α , проходящей через прямую b параллельно прямой a . Поэтому $A_1B_1 \parallel AB$ и точки A_1 , B_1 , A , B принадлежат одной плоскости. Значит, и прямые AA_1 и BB_1 принадлежат одной плоскости. Получили противоречие с тем, что эти прямые скрещиваются.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Из доказательства теоремы 8 следует, что *расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, содержащей другую прямую и параллельную первой.*

Пример 1. В четырёхугольной пирамиде $QABCD$ все рёбра равны a . Найдём расстояние между скрещивающимися рёбрами AB и QC (рис. 364).

Из теоремы 8 следует, что на прямых AB и QC есть такие точки X и Y , что прямая XY перпендикулярна как прямой AB , так и прямой QC , и вместе с этим плоскости, проходящей через одну из этих прямых параллельно другой.

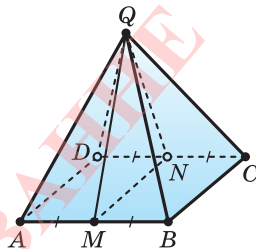


Рис. 364

Пусть α — плоскость, проходящая через точку Q перпендикулярно прямой AB . Она проходит через середины M и N рёбер AB и CD . Тогда $XY \parallel \alpha$ и проекцией отрезка XY на плоскость α будет отрезок, равный XY . Определим, в какие точки спроектируются точки X и Y . Поскольку $AB \perp \alpha$, то вся прямая AB проектируется в одну точку M . Значит, точка X проектируется в точку M . Поскольку точки Q и C проектируются в точки Q и N соответственно, то прямая QC проектируется в прямую QN . Учтём теперь, что прямая QN принадлежит плоскости, параллельной AB . Поэтому искомая проекция отрезка XY есть перпендикуляр к QN , проведённый из точки M . Длину d этого перпендикуляра найдём, используя площадь равнобедренного треугольника QMN с основанием a и боковыми сторонами $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Получим $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, откуда $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Теперь мы можем точно описать взаимное расположение двух прямых в пространстве с помощью чисел. Если прямые a и b пересекаются, то их взаимное расположение характеризует угол α между ними (рис. 365). Если прямые a и b параллельны, то их взаимное расположение характеризует расстояние d между ними (рис. 366). Если прямые

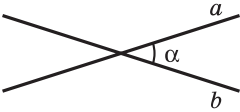


Рис. 365

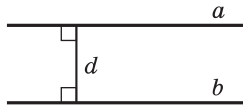


Рис. 366

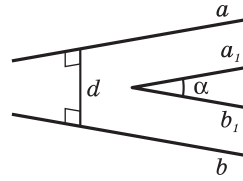


Рис. 367

a и b скрещиваются, то их взаимное расположение характеризует угол α и расстояние d между ними (рис. 367).

Теорема 9. Если прямая перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

Доказательство. Пусть отрезки AB и AC — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α , тогда отрезок BC — проекция наклонной AC на эту плоскость (рис. 368).

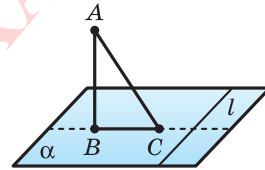


Рис. 368

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна проекции BC . Докажем, что прямая l перпендикулярна самой наклонной AC .

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC — первой прямой по условию, а второй потому, что она лежит в плоскости α , которой перпендикулярна прямая AB . Поэтому прямая l перпендикулярна и прямой BC плоскости ABC .

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна наклонной AC . Докажем, что прямая l перпендикулярна проекции BC этой наклонной.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC . Поэтому она перпендикулярна и прямой AC плоскости ABC .

Теорема 9 называется *теоремой о трёх перпендикулярах* из-за того, что в ней говорится об отношении перпендикулярности между тремя прямыми. Приведём примеры использования этой теоремы.

Пример 2. Из вершины A к плоскости треугольника ABC , стороны которого AB , BC , CA соответственно равны 13, 20, 11, возведён перпендикуляр AD длиной 36 (рис. 369). Найдём расстояние от точки D до прямой BC .

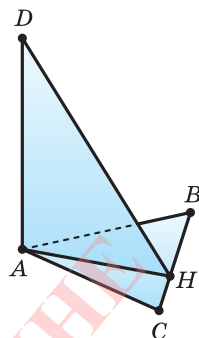


Рис. 369

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую BC . Проведение этого перпендикуляра требует найти его основание на прямой BC . Для этого в плоскости треугольника ABC построим высоту AH этого треугольника. Поскольку прямая BC перпендикулярна высоте AH , являющейся проекцией наклонной DH , то по теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной DH , т. е. отрезок DH выражает искомое расстояние. Чтобы его вычислить, найдём сначала высоту AH треугольника ABC . По формуле Герона определим площадь S этого треугольника, что позволит найти и его высоту AH :

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6,6.$$

Теперь, учитывая, что треугольник DAH — прямоугольный с прямым углом A , по теореме Пифагора найдём DH :

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6.$$

Пример 3. Докажем, что если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Пусть точка S равноудалена от сторон A_1A_2 , A_2A_3 , ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ и SO — перпендикуляр из точки S на плоскость этого многоугольника.

ка. Тогда перпендикуляры $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, опущенные из точки O на стороны многоугольника, равны друг другу (рис. 370).

Соединим точку O с точками $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n$. Поскольку отрезки $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ — проекции отрезков $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$ на плоскость многоугольника, стороны которого $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ соответственно перпендикулярны наклонным $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, то эти стороны и соответственно отрезки $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ перпендикулярны. Значит, треугольники $SOK_1, SOK_2, \dots, SOK_{n-1}, SOK_n$ прямоугольные и все они имеют общий катет SO и равные гипотенузы. Поэтому эти треугольники равны, а значит, равны и отрезки $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$, что означает равноудалённость точки O от сторон многоугольника. Значит, в этот многоугольник можно вписать окружность с центром O .

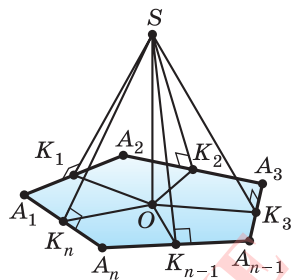


Рис. 370

Пример 4. Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Используя рисунок 371, проведите доказательство этого утверждения самостоятельно.

Теперь введём понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть есть плоскость α и прямая l , её пересекающая и не перпендикулярная α (рис. 372). Основания перпенди-

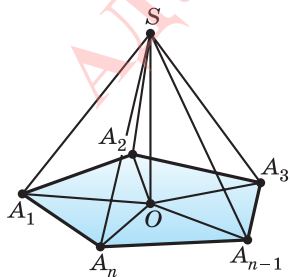


Рис. 371

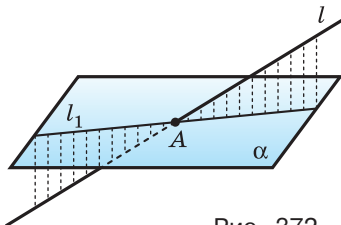


Рис. 372

куляров, опущенных из точек прямой l на плоскость α , образуют прямую l_1 . Эта прямая называется *проекцией прямой l на плоскость α* .

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью — наименьший из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости.

Если прямая l перпендикулярна плоскости α , то её проекцией на эту плоскость является точка A пересечения прямой с плоскостью (рис. 373). В этом случае прямая l образует со всеми прямыми плоскости углы, равные 90° . Этот угол и принимается в качестве угла между прямой и перпендикулярной ей плоскостью.

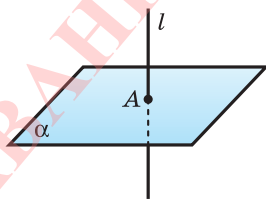


Рис. 373

Если прямая l параллельна плоскости α , то её проекцией на плоскость является прямая l_1 , параллельная l . Угол между параллельными прямыми считается равным 0° . Поэтому угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным 0° .



1. Какой отрезок называется перпендикуляром к плоскости? Какая точка называется основанием перпендикуляра?
2. Какой отрезок называется наклонной к плоскости? Какая точка называется основанием наклонной?
3. Сформулируйте утверждение о сравнении длин перпендикуляра и наклонной к плоскости, проведённых из одной точки.
4. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
5. Сформулируйте утверждение о расстоянии от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.
6. Что называется расстоянием между параллельными плоскостями?
7. Сформулируйте утверждение о расстоянии до плоскости от любой точки прямой, параллельной этой плоскости.
8. Что называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью?
9. Сформулируйте утверждение об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.
10. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?
11. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.
12. Каким отношением связаны многоугольник и точка, равноудалённая от сторон этого многоугольника?

13. Каким отношением связаны многоугольник и точка, равноудалённая от вершин этого многоугольника?

14. Что называется проекцией прямой на плоскость?

15. Что называется углом между прямой и плоскостью?

880. Укажите, в чём отличие:

а) перпендикуляра к плоскости и прямой, перпендикулярной плоскости;

б) наклонной к плоскости и прямой, пересекающей плоскость.

881. Докажите, что если из одной точки вне плоскости к ней проведены две наклонные, то:

а) наклонные, имеющие равные проекции, равны друг другу;

б) та наклонная больше, проекция которой больше;

в) равные наклонные имеют равные проекции;

г) большая наклонная имеет большую проекцию.

882. Из точки A к плоскости α проведены четыре равные наклонные AX , AY , AZ , AT . Докажите, что точки X , Y , Z , T принадлежат одной окружности, центром которой является проекция O точки A на плоскость α .

883. Из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен β . Найдите:

а) наклонную и её проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d ;

б) перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m .

884. Точка K принадлежит прямой p , проходящей через вершину A прямоугольника $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Учитывая, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, найдите расстояние:

а) от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$;

б) между прямыми AK и CD .

885. Из точки к плоскости проведены две наклонные длинами 10 см и 17 см, проекции которых отличаются на 9 см. Найдите эти проекции.

886. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, учитывая, что:

а) одна из них на 14 см больше другой, а проекции наклонных равны 16 см и 40 см;

б) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 10 см и 70 см.

887. Из точки к плоскости проведены две наклонные длинами 2 м каждая. Найдите расстояние от точки до плоскости, учитывая, что наклонные образуют угол в 60° , а их проекции перпендикулярны.

888. Длина перпендикуляра PQ из точки P к плоскости равна 1, а длины наклонных PA и PB к этой же плоскости равны 2. Точка C — середина отрезка AB . Найдите QC , учитывая, что:

а) $\angle APB = 90^\circ$;

б) $\angle APB = \beta$.

889. Из вершины B тупого угла параллелограмма $ABCD$ к его плоскости возведён перпендикуляр BH . Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что $AH = 5$ см, $HD = HC = 8,5$ см, $AC = 1,5\sqrt{33}$ см.

890. Точка M отстоит на 40 см от каждой вершины правильного треугольника ABC со стороной 60 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC .

891. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 374). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между точкой P и прямой:

а) RS ;

б) P_1S_1 ;

в) RR_1 ;

г) Q_1R_1 .

892. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 374). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между параллельными плоскостями:

а) $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$;

б) PP_1Q_1Q и SS_1R_1R ;

в) PP_1S_1S и QQ_1R_1R .

893. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 374). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между параллельными прямой и плоскостью:

а) PQ и $P_1Q_1R_1S_1$;

б) PQ_1 и SS_1R_1R ;

в) PR и $P_1Q_1R_1S_1$.

894. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 374).

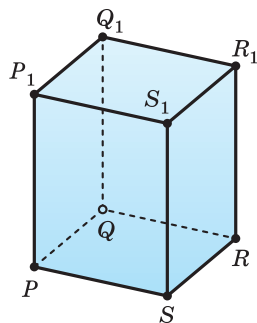


Рис. 374

Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между скрещивающимися прямыми:

- а) PQ и SS_1 ; б) PQ_1 и SS_1 ; в) PR и P_1S_1 .

895. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 374). Назовите проекцию прямой:

- а) PQ на плоскость SS_1R ;
 б) PQ на плоскость QQ_1R_1 ;
 в) PQ_1 на плоскость PQR ;
 г) PQ_1 на плоскость SS_1R_1 ;
 д) PR_1 на плоскость QRS ;
 е) PR_1 на плоскость PQ_1Q .

896. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 374). Назовите угол между прямой:

- а) PQ и плоскостью SS_1R ; г) PR_1 и плоскостью PQ_1Q ;
 б) PQ и плоскостью QQ_1R_1 ; д) PR_1 и плоскостью QRS ;
 в) PQ_1 и плоскостью PQR ; е) PR_1 и плоскостью QRR_1 .

897. Через вершину A треугольника ABC параллельно прямой BC проведена плоскость γ , и из точек B и C на плоскость γ опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1 . Найдите площадь треугольника ABC , учитывая, что $\angle B_1AC_1 = 90^\circ$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 25\sqrt{2}$ см, а расстояние между прямой BC и плоскостью γ равно 5 см.

898. Через одну из сторон ромба проведена плоскость, отстоящая от противоположной стороны ромба на 8 см. Найдите проекции сторон ромба на эту плоскость, учитывая, что проекции диагоналей на неё равны 16 см и 4 см.

899. Через основание AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость α , отстоящая от другого основания на m (рис. 375). Найдите расстояние от точки O пересечения диагоналей трапеции до плоскости α , учитывая, что основания трапеции относятся как $p : q$.

900. Концы отрезка длиной 100 см принадлежат параллельным плоскостям, расстояние между которыми равно 80 см. Найдите проекции отрезка на каждую плоскость.

901. Есть две параллельные плоскости. Из двух точек одной

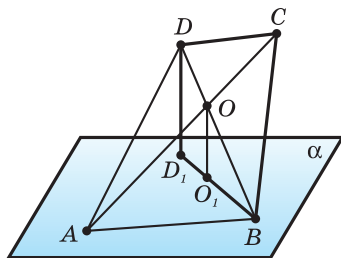


Рис. 375

из них проведены наклонные ко второй плоскости длинами 37 см и 125 см, причём проекция первой наклонной на одну из плоскостей равна 12 см. Найдите проекцию второй наклонной.

902. В плоскости δ проведены две параллельные прямые MN и KL , отстоящие на a , а вне плоскости δ выбрана точка C , отстоящая от MN на b и от KL на c . Найдите расстояние от точки C до плоскости δ , учитывая, что:

- а) $a = 66$, $b = c = 65$; б) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

903. Есть треугольная пирамида $PABC$, у которой $PA = PB = PC = 2$, $AC = 3$ и $AB = 2$. Начертите и найдите расстояние от вершины до основания пирамиды, учитывая, что ребро BC равно:

- а) 2; б) 3; в) 4.

904. Из вершины B квадрата $ABCD$ к его плоскости возведён перпендикуляр QB . Найдите площадь треугольника QAD , учитывая, что $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

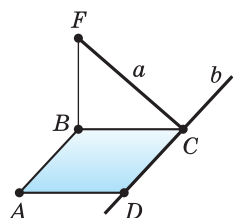


Рис. 376

905. Укажите взаимное расположение прямых a и b на рисунке:

а) 376, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BF \perp ABC$;

б) 377, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BG \perp ABC$;

в) 378, учитывая, что $ABCD$ — ромб и $AE \perp ABC$;

г) 379, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BK \perp ABC$.

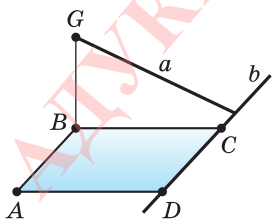


Рис. 377

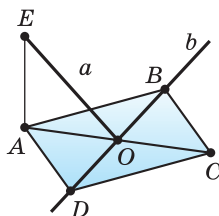


Рис. 378

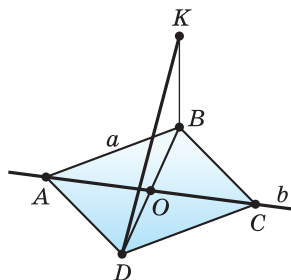


Рис. 379

906. Углы BAC и ACB треугольника ABC соответственно равны 41° и 49° , а отрезок AD перпендикулярен плос-

кости этого треугольника (рис. 380). Докажите, что прямые BC и BD перпендикулярны.

907. Из вершины A треугольника ABC возведён перпендикуляр AM и точка M соединена с серединой D стороны BC (рис. 381). Докажите, что:

а) прямые MD и BC перпендикулярны, если стороны AB и AC равны;

б) стороны AB и AC равны, если прямые MD и BC перпендикулярны.

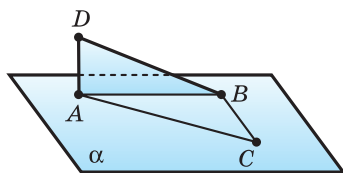


Рис. 380

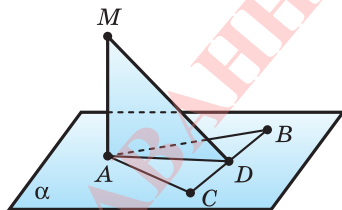


Рис. 381

908. Отрезок AD длиной 12 см перпендикулярен плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и боковой стороной, соответственно равными 6 см и 5 см. Определите, на каких расстояниях от прямой BC находятся концы отрезка AD .

909. Из вершины большего угла треугольника со сторонами 20 см, 34 см и 42 см возведён перпендикуляр к плоскости этого треугольника длиной 30 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны треугольника.

910. Стороны AB , AC , BC треугольника ABC соответственно равны 13, 12 и 5, а отрезок BD перпендикулярен плоскости этого треугольника (рис. 382). Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

911. Отрезки AE и CF — высоты треугольника ABC , а отрезок BK — перпендикуляр к плоскости ABC (рис. 383). Докажите, что прямые KD и AC перпендикулярны.

912. Точка M лежит на прямой, проходящей через вершину B ромба $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, учитывая, что $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $BM = 12,5$ см.

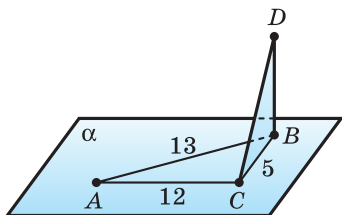


Рис. 382

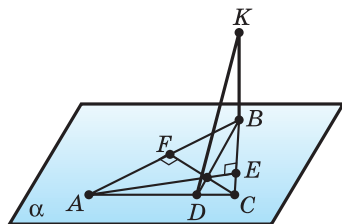


Рис. 383

913. Докажите, что если луч KA не лежит в плоскости неразвёрнутого угла LKM и острые углы AKL и AKM равны, то проекция луча KA на плоскость LKM является биссектрисой угла LKM .

914. Точка X принадлежит прямой, проходящей через центр O правильного треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Докажите, что:

а) расстояния от точки X до вершин треугольника равны;

б) расстояния от точки X до сторон треугольника равны;

в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;

г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$.

915. Точка F лежит на прямой, проходящей через вершину B квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до прямых, которым принадлежат стороны и диагонали квадрата, учитывая, что $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм.

916. Есть прямоугольный треугольник ABC , один катет которого и прилежащий к нему острый угол равны m и β . Из вершины прямого угла C восстановлен перпендикуляр CD , равный n . Найдите расстояние от точки D до прямой AB .

917. Учитывая, что точка K лежит на прямой, проходящей через центр O симметрии ромба $ABCD$ перпендикулярно его плоскости:

а) докажите равенство расстояний от точки K до всех прямых, которым принадлежат стороны ромба;

б) найдите это расстояние, если $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;

в) $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

918. Из центра O окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и боковой стороной AB , соответственно равными 18 см и 15 см, возведён перпендикуляр OX , равный 6 см. Найдите расстояния точки X от сторон треугольника.

919. Основанием треугольной пирамиды $DFGH$ является прямоугольный треугольник FGH с гипотенузой FG и углом HFG в 30° . Найдите высоту грани FDG , проведённую из вершины D , учитывая, что боковое ребро DH перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см, а $FH = 6$ см.

920. В равнобедренном треугольнике XYZ с основанием XY боковая сторона равна 20, а угол при основании составляет 30° . Из его вершины Y к плоскости XYZ возведён перпендикуляр QY . Найдите расстояния от точки Q до прямой XZ и от точки Y до плоскости XQZ , учитывая, что $QY = 10$.

921. Основанием четырёхугольной пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ с углом ABC и стороной AB , соответственно равными 60° и a . Её боковое ребро AQ перпендикулярно плоскости основания. Найдите это ребро и расстояние от точки A до плоскости QDC , учитывая, что площадь грани QDC равна a^2 .

922. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q , прямая HQ перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Найдите высоту параллелограмма, учитывая, что его стороны равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки H до сторон параллелограмма равны 17 см и 25 см.

923. Точка A , лежащая вне плоскости прямого угла UVW , отстоит от его вершины V на x , а от каждой из сторон — на y (рис. 384). Найдите расстояние AO точки A от плоскости прямого угла.

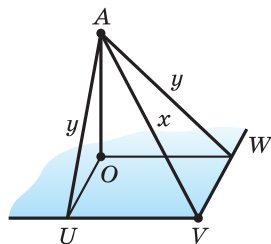


Рис. 384

924. Есть прямоугольный треугольник XYZ с гипотенузой YZ и катетом XU , соответственно равными 13 см и 12 см. К плоскости треугольника из центра Q вписанного в него круга возведён перпендикуляр QG длиной 1,5 см. Найдите расстояния точки G от сторон треугольника и от его вершин.

925. Из вершины M треугольника MNK вне его плоскости проведена прямая ML , образующая со сторонами MN и MK равные острые углы. Определите, на какие части проекция прямой ML на плоскость треугольника разделяет сторону NK , учитывая, что $MN = 51$ м, $MK = 34$ м и $NK = 30$ м.

926. Вершина пирамиды, в основании которой лежит прямоугольная трапеция с периметром 32, находится на расстоянии $\sqrt{17}$ от рёбер основания. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что её наибольшее и наименьшее боковые рёбра равны $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

927. Из вершины B прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 6$ см и $AD = 6\sqrt{2}$ см, к его плоскости возведён перпендикуляр BQ . Найдите расстояние от точки Q до плоскости прямоугольника, учитывая, что угол между прямой QD и плоскостью ABC равен 30° .

928. Докажите, что проекцией прямой на плоскость является прямая.

929. Найдите проекцию на плоскость наклонной длиной m , учитывая, что наклонная образует с плоскостью угол, равный:

- а) 45° ; б) 60° ; в) 30° .

930. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость: концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

931. Из точки, отстоящей от плоскости на d , проведены две наклонные, которые образуют между собой угол φ , а с плоскостью — углы α и β . Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:

- а) $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

932. Из точки, отстоящей от плоскости на d , проведены две наклонные, которые образуют с плоскостью углы α и β , а их проекции — угол φ . Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:

- а) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 150^\circ$;
б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

933. Докажите, что угол между прямой и плоскостью является наименьшим из углов, которые образует эта пря-

мая со всеми прямыми плоскости, проходящими через точку пересечения прямой с плоскостью.

934. Из точки A , отстоящей на d от плоскости α , проведены наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость α образуют угол в 120° . Найдите длину отрезка BC .

935. Докажите, что:

а) если один катет равнобедренного прямоугольного треугольника принадлежит плоскости, а другой образует с ней угол в 45° , то гипотенуза образует с плоскостью угол в 30° ;

б) если наклонная a образует с плоскостью α угол в 45° , а прямая b плоскости — угол в 45° с проекцией наклонной, то угол между прямыми a и b равен 60° .

936. Точка P отстоит на a от каждой вершины квадрата $ABCD$ со стороной a . Найдите угол, который образует с плоскостью квадрата прямая AP .

937. Есть треугольная пирамида, все рёбра которой равны друг другу. Найдите угол между ребром пирамиды и гранью, которой оно не принадлежит.

938. Из точки Q к плоскости α проведены такие равные наклонные QA и QB , что угол между ними равен 60° , а угол между их проекциями на плоскость α составляет 90° . Найдите угол, который образует наклонная QA с плоскостью α .

939. Боковое ребро RA четырёхугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника RAC , учитывая, что ребро RB равно 20 мм, а боковые рёбра RB и RD наклонены к плоскости основания под углами 30° и 45° соответственно.

940. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна расстоянию от вершины до плоскости основания, то боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углами в 60° .

941. Вершина правильной четырёхугольной пирамиды отстоит от плоскости основания на h , а её боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в 60° . Найдите боковую поверхность пирамиды.

942. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . Найдите расстояние между прямыми:

- а) AB_1 и CD_1 ; б) AC и BB_1 ; в) A_1D и C_1A .

943. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c . Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней.

944. В треугольной пирамиде все рёбра равны a . Найдите расстояние между рёбрами, не принадлежащими одной грани.

945. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a , а все боковые рёбра — b . Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

946. Точка M — середина ребра AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите расстояние между прямыми $A_1 M$ и $B_1 C$, учитывая, что ребро куба равно a .

947. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a , а все боковые рёбра — b . Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

948. Докажите тождество:

а) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$;

б) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$.

949. Докажите тождество:

а) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = 4$;

б) $\operatorname{tg} \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{tg} 2z$;

в) $\sin 2\gamma - \operatorname{tg} \gamma = \cos 2\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma$;

г) $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x$;

д) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} y} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} 2y$;

е) $\frac{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg} 3b \cdot 3 \operatorname{ctg} b$.

950. Докажите, что если $a + b + c = \pi$, то:

а) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$;

б) $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$.

951. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 3\beta - \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 3\beta \cdot \operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta$;

б) $\frac{1 + \cos \beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta}{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1} = 2 \cos \beta$;

в) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+y)} = \operatorname{tg} y$.

952. Введя вспомогательный аргумент, например, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, представьте произведением выражение:

а) $1 + \sin \alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin y$; д) $\sqrt{3} + 2 \cos \alpha$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 35^\circ$; е) $\frac{1}{4} - \cos^2 c$.

953. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin x + \cos 2x$;

в) $\sin 2z - \cos 4z$;

б) $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$;

г) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

954. На отрезке AB выбрали точку O , отстоящую на 50 мм от точки A , и на отрезках-частях OA и OB как на высотах построили такие прямоугольные трапеции $OCDA$ и $OCFB$, что средняя линия второй — 40 мм, а их площади относятся как 2 : 1. Когда на отрезке AB как на высоте построили третью прямоугольную трапецию с площадью $ABGE$, равной суммарной площади трапеций $OCDA$ и $OCFB$, то её средняя линия оказалась равной 45 мм (рис. 385). Найдите стороны и углы этих трапеций, учитывая, что основание OC трапеции $OCFB$ в два раза больше боковой стороны OB .

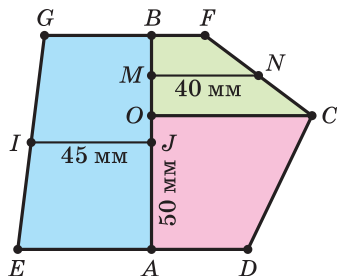


Рис. 385

955. На отрезке MN выбрали точку A , отстоящую на 64 мм от точки N , и на отрезках-частях AM и AN как на средних линиях построили такие трапеции $OPQR$ и $ILKJ$,

что высота первой из них равна 30 мм, а их площади относятся как 45 : 88. Если бы на отрезке MN как на средней линии построили третью трапецию $STUV$ с площадью, равной суммарной площади трапеций $OPQR$ и $ILKJ$, то её высота оказалась бы равной 38 мм (рис. 386). Найдите площади трапеций $OPQR$ и $ILKJ$.

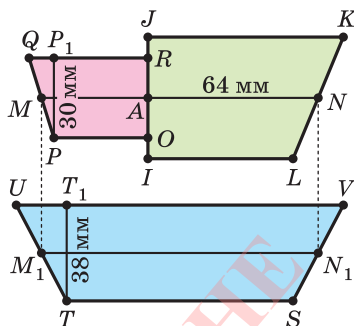


Рис. 386

956. Три мотоциклиста A , B и C выехали одновременно из некоторой точки кольцевой трассы в одном направлении с постоянными скоростями и через некоторое время снова оказались в одной точке. Определите, сколько раз за это время A перегонял C , учитывая, что A 3 раза перегнал B и B 4 раза перегнал C .

957. В окружность вписан правильный n -угольник $A_1A_2...A_n$. Докажите, что значение выражения $AA_1^2 + AA_2^2 + ... + AA_n^2$ не зависит от выбора точки A на окружности, и найдите это значение.

958. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + xy = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

18. Перпендикулярность плоскостей

Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части, каждая из которых называется *углом* (рис. 387).

Аналогично две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части (рис. 388). Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют *двугранным углом*. Полуплоскости, ограничивающие двугранный угол, называют *гра-*

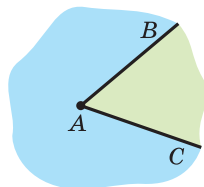


Рис. 387

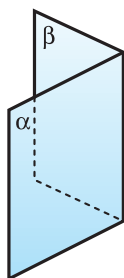


Рис. 388

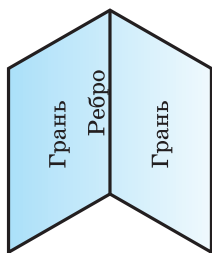


Рис. 389

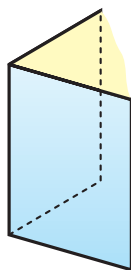


Рис. 390

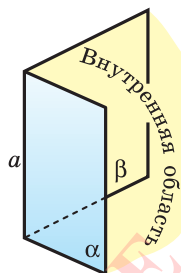


Рис. 391

ниями угла, а общую прямую — **ребром** двугранного угла (рис. 389).

Обычно рассматривают меньший из двугранных углов с данными гранями (рис. 390). Точки угла, не лежащие на его гранях, составляют *внутреннюю область* двугранного угла (рис. 391).

Двугранный угол обычно обозначают по ребру: $\angle a$ (см. рис. 391) или $\angle AB$ (рис. 392). При необходимости можно присоединить названия граней или названия точек на гранях: $\angle \alpha\alpha\beta$ (см. рис. 391), или $\angle \alpha AB\beta$ (см. рис. 392), или $\angle MABN$ (см. рис. 392).

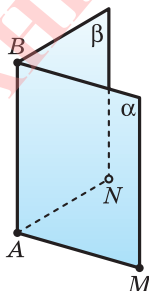


Рис. 392

Моделью двугранного угла может служить двускатная крыша (рис. 393), стена вместе с открытой дверью (рис. 394), полураскрытая книга (рис. 395).

Для измерения двугранных углов вводится понятие линейного угла. Выберем на ребре AB двугранного угла $\alpha AB\beta$ точку P и в его гранях α и β из этой точки проведём лучи

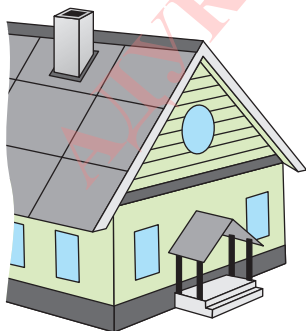


Рис. 393

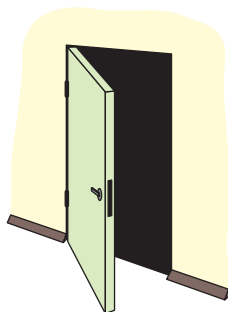


Рис. 394



Рис. 395

PQ и PR , перпендикулярные ребру AB (рис. 396). Полученный угол QPR , стороны которого PQ и PR ограничивают часть плоскости PQR , принадлежащую двугранному углу $\alpha AB\beta$, называют **линейным углом** двугранного угла. Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла, так как по построению лучи PQ и PR перпендикулярны ребру AB .

Понятно, что двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов (рис. 397).

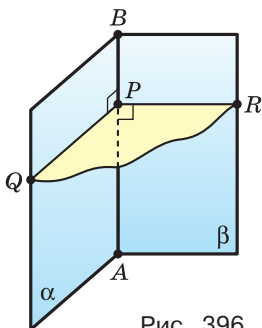


Рис. 396

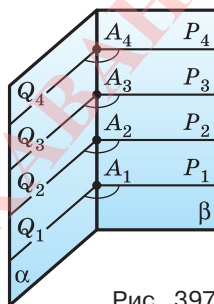


Рис. 397

Теорема 10. *Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.*

Доказательство. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — линейные углы двугранного угла MN (рис. 398). Докажем, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

Отложим на сторонах углов $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равные отрезки B_1P , B_2Q , B_1S , B_2R . Тогда получатся четырёхугольники PQB_2B_1 и SRB_2B_1 , у которых противоположные стороны PB_1 и QB_2 , а также SB_1 и RB_2 равны по построению и параллельны как перпендикуляры к одной прямой, проведённые в соответствующей плоскости. Поэтому $PQ = B_2B_1 = SR$ и $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А это означает, что четырёхугольник $PQRS$ является параллелограммом, что позволяет сделать вывод о равенстве отрезков PS и QR . Получили, что у треугольников PSB_1 и QRB_2 равны соответствен-

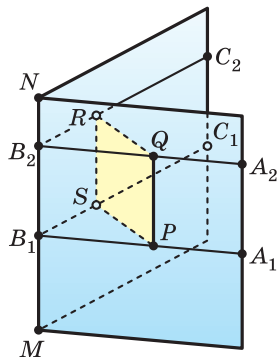


Рис. 398

ные стороны, поэтому треугольники равны, а значит, равны и их углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Измерение двугранных углов связывается с измерением их линейных углов. В зависимости от того, каким — острым, прямым, тупым, развёрнутым — является линейный угол двугранного угла, отличают *острые, прямые, тупые, развёрнутые двугранные углы*. Двугранный угол, изображённый на рисунке 399, — острый, на рисунке 400 — прямой, на рисунке 401 — тупой.

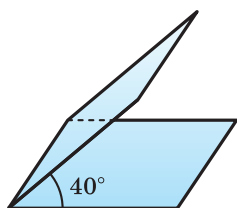


Рис. 399

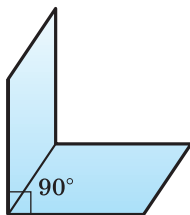


Рис. 400

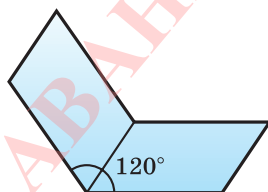


Рис. 401

Две пересекающиеся плоскости разделяют пространство на четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 402). Если один из них равен α , то ещё один из них также равен α , а два остальных — $180^\circ - \alpha$. Среди этих углов есть не превосходящий 90° , его величину и принимают за величину угла между пересекающимися плоскостями.

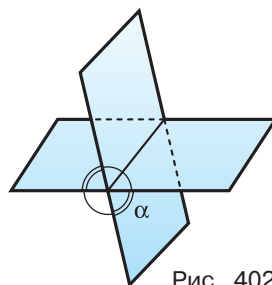


Рис. 402

Если один из углов, образовавшихся при пересечении двух плоскостей, прямой, то три остальных также прямые (рис. 403).

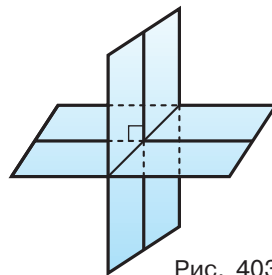


Рис. 403

Плоскости, при пересечении которых образуются прямые двугранные углы, называются **перпендикулярными плоскостями**.

Для обозначения перпендикулярности плоскостей, как и для обозначения перпендикулярности прямых, используют знак $\perp$.

Моделями перпендикулярных плоскостей могут служить крышка стола и его боковина (рис. 404), пол комнаты и дверь в неё (рис. 405).

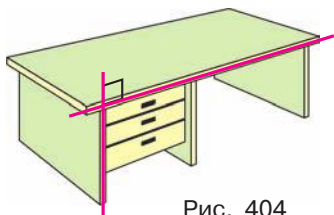


Рис. 404

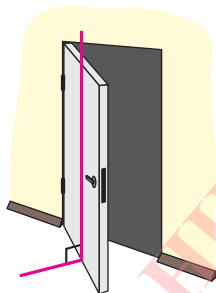


Рис. 405

Теорема 11. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть через прямую a , которая перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке M , проходит плоскость β (рис. 406). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой MP , перпендикулярной прямой a , так как по условию прямая a и плоскость α перпендикулярны.

В плоскости α проведём прямую MN , перпендикулярную прямой MP . Полученный угол NMQ , где Q — точка прямой a , есть линейный угол двугранного угла $\alpha MP \beta$.

Поскольку по условию $a \perp \alpha$, то угол NMQ — прямой, и, значит, плоскости α и β перпендикулярны.

Теорема 11 выражает признак перпендикулярности плоскостей.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них (рис. 407).

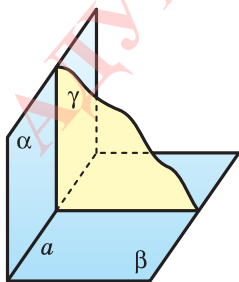


Рис. 407

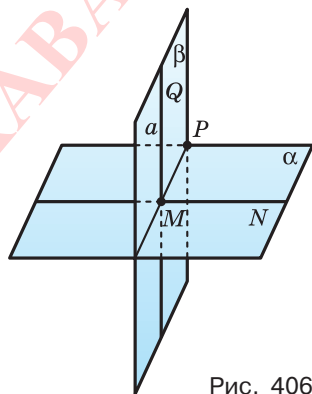


Рис. 406

Докажем теперь утверждение, обратное утверждению теоремы 11.

Теорема 12. Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

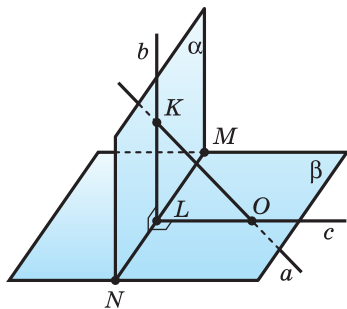


Рис. 408

Доказательство. Пусть две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN и через точку K плоскости α проведена прямая a , перпендикулярная плоскости β . Докажем, что эта прямая принадлежит плоскости α .

Через точку K в плоскости α проведём прямую b , перпендикулярную MN , и через точку L их пересечения в плоскости β — прямую c , также перпендикулярную MN (рис. 408). Угол между прямыми b и c прямой как линейный угол прямого двугранного угла. Получили, что прямая b проходит через точку K и перпендикулярна плоскости β , так как она перпендикулярна пересекающимся прямым MN и c этой плоскости. А поскольку через данную точку к данной плоскости можно провести только одну перпендикулярную прямую, то прямые b и a совпадают. Значит, прямая a принадлежит плоскости α .

Пример 1. Точка M — середина ребра AB при основании правильной пирамиды $QABC$ (рис. 409). Докажем, что плоскость QCM перпендикулярна плоскости основания ABC .

Прямая AB является основанием равнобедренных треугольников AQB и ACB . Поэтому она перпендикулярна медианам QM и CM в этих треугольниках и вместе с этим плоскости QCM . Из теоремы 12 следует, что плоскость ABC , проходящая через перпендикуляр AB к плоскости QCM , ей перпендикулярна.

Следствие. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения

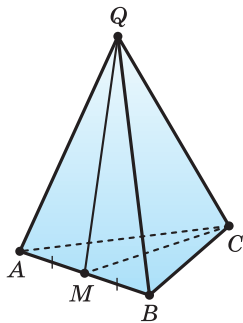


Рис. 409

ния перпендикулярна той же плоскости (рис. 410).

Пример 2. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен α . Найдём двугранный угол при боковом ребре.

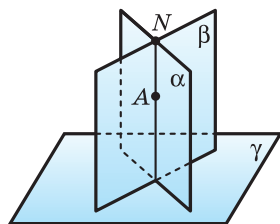


Рис. 410

Пусть N — середина ребра AC , AK — перпендикуляр к ребру BQ , проведённый из точки A (рис. 411). Из равенства треугольников ABQ и CBQ следует, что $CK \perp BQ$. Поэтому угол AKC — линейный угол двугранного угла BQ .

Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ получаем: $AK = AQ \sin \alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKN находим, что

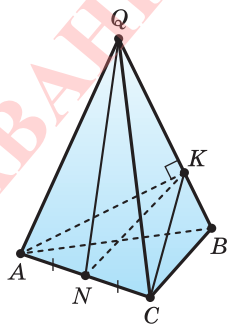


Рис. 411

$$\sin \left(\frac{\angle AKC}{2} \right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$



1. Что называют углом? Что называют двугранным углом?
2. Что называют гранью двугранного угла; ребром двугранного угла? Как обозначают двугранный угол?
3. Как построить линейный угол двугранного угла? Какое свойство имеют линейные углы двугранного угла?
4. Какой двугранный угол называют острым; прямым; тупым; развёрнутым?
5. Какие плоскости называются перпендикулярными?
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
7. Сформулируйте свойство плоскости, перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей.
8. Сформулируйте свойство прямой, проведённой через точку одной из перпендикулярных плоскостей перпендикулярно другой плоскости.
9. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.

959. Сколько двугранных углов имеет:

- а) треугольная пирамида;
- б) параллелепипед?

960. Есть параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 412), в основании которого лежит квадрат. Назовите его:

- а) прямые двугранные углы;
- б) перпендикулярные грани.

961. Есть прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовите линейный угол двугранного угла:

- а) DD_1 ; б) $A_1 B_1$.

962. Учитывая, что $STUVS_1 T_1 U_1 V_1$ — куб (рис. 413), определите:

а) является ли угол TVT_1 линейным углом двугранного угла $T_1 SVT$;

б) является ли угол $T_1 ST$ линейным углом двугранного угла $T_1 SVT$;

в) величину двугранного угла $V_1 UTS$.

963. Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна третьей плоскости, быть:

- а) параллельными плоскостями;
- б) перпендикулярными плоскостями?

964. Учитывая, что точка T — середина ребра QR треугольной пирамиды $OPQR$, у которой основанием является правильный треугольник PQR , а боковые рёбра равны друг другу, определите, является ли угол:

- а) PRO линейным углом двугранного угла $PRQO$;
- б) PTO линейным углом двугранного угла $PRQO$.

965. Все рёбра треугольной пирамиды $ABCD$ равны друг другу, а точка M — середина ребра AC . Докажите, что угол DMB является линейным углом двугранного угла $BACD$.

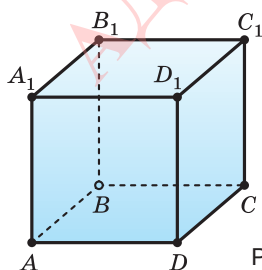


Рис. 412

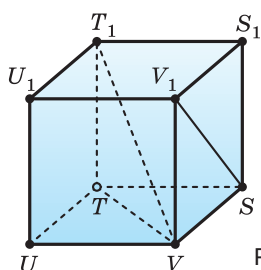


Рис. 413

966. Есть два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани вместе составляют плоскость. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180° .

967. Докажите, что если двугранный угол $\alpha AB\beta$ разбить на два двугранных угла $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$ (рис. 414), то линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$ равен сумме линейных углов двугранных углов $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$.

968. Из вершины X треугольника XYZ , сторона YZ которого лежит в плоскости β , проведена высота XA и перпендикуляр XP к плоскости β (рис. 415). Докажите, что угол XAP — линейный угол двугранного угла $XYZP$.

969. Докажите, что через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

970. Докажите, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани.

971. Прямая a не перпендикулярна плоскости α . Докажите, что существует плоскость, которая содержит прямую a и перпендикулярна плоскости α .

972. На рисунке 416 двугранные углы $RABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABR и ABQ .

973. Две точки одной грани двугранного угла отстоят от его ребра на 51 см и 34 см, а первая из них отстоит от другой грани на 15 см. Найдите расстояние до этой грани от другой точки.

974. На одной грани двугранного угла выбрана точка X , отстоящая на 36 см от ребра угла и на 24 см от другой

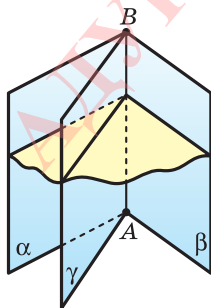


Рис. 414

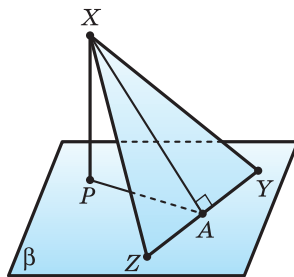


Рис. 415

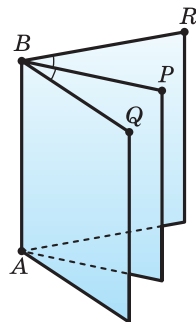


Рис. 416

его грани, на другой грани этого угла выбрана точка Y , отстоящая от первой грани на 18 см. Найдите расстояние точки Y от ребра угла.

975. Плоскость прямоугольного треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом в 45° (рис. 417). Найдите расстояние вершины прямого угла C от плоскости α , учитывая, что $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = a$.

976. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC под углом в 45° к его плоскости проведена плоскость γ , отстоящая от вершины прямого угла C на l (рис. 418). Найдите площадь треугольника.

977. Большой катет прямоугольного треугольника с острым углом и гипотенузой, соответственно равными 30° и c , лежит в плоскости γ , составляющей с плоскостью треугольника угол в 60° . Найдите:

а) расстояние от вершины большего острого угла треугольника до плоскости γ ;

б) угол между гипотенузой и плоскостью γ .

978. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами, равными 7 см и 24 см, до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет с плоскостью треугольника угол в 30° .

979. Основанием прямой призмы является треугольник MNK , в котором $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Через сторону MK проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания, пересекающая противоположное боковое ребро в точке L . Найдите:

а) отрезок NL бокового ребра;

б) площадь полученного сечения.

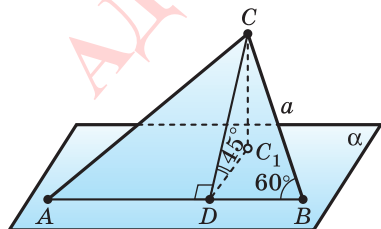


Рис. 417

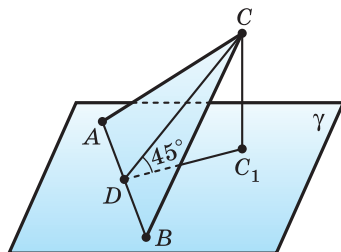


Рис. 418

980. Через сторону CE треугольника CDE , у которого $CD = 9$ м, $DE = 6$ м и $CE = 5$ м, проходит плоскость ρ , составляющая с плоскостью треугольника угол в 45° . Найдите расстояние до плоскости ρ от вершины D .

981. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC , $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

982. Найдите двугранный угол $ABCD$ треугольной пирамиды $ABCD$, учитывая, что углы DAB , DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$ и $DB = 5\sqrt{5}$.

983. Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD , учитывая, что треугольники:

- а) равносторонние;
- б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB .

984. Плоскости правильного треугольника KDM и четырёхугольника $KMNP$ перпендикулярны. Найдите DN , учитывая, что $KM = a$.

985. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC . Найдите угол между плоскостями этих треугольников.

986. Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость ω является квадрат ABC_1D_1 . Найдите угол между плоскостью ω и плоскостью прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $AB : BC = 1 : 2$.

987. Отрезок EL , соединяющий вершину E треугольника CDE с вершиной L треугольника CDL , перпендикулярен плоскости этого треугольника. Докажите, что площадь треугольника CDE равна $S \cdot \cos \varphi$, где S — площадь треугольника CDL , φ — угол между плоскостями CDL и CDE .

988. Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного 60° , а их точки A и D отстоят от ребра этого угла соответственно на 16 см и 13 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

989. Из точек A и B ребра двугранного угла, равного 120° , в разных его гранях возведены перпендикуляры AC и BD к ребру. Найдите отрезок CD , учитывая, что $AB = AC = BD = a$.

990. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длина равна l . Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

991. Перпендикуляры, опущенные из точек C и D , взятых в разных перпендикулярных плоскостях, на линию их пересечения, соответственно равны c и d , а расстояние между их основаниями равно l . Найдите отрезок CD и его проекции на каждую из плоскостей.

992. Из точек C и D ребра двугранного угла, равного 120° , в разных его гранях возведены перпендикуляры CK и DL . Найдите длину отрезка KL , учитывая, что $CK = DL = 3$ см.

993. В разных гранях двугранного угла из точек M и N его ребра к этому ребру возведены перпендикуляры MA и NB . Определите расстояние AB , учитывая, что:

а) двугранный угол прямой, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см и $NB = 12$ см;

б) двугранный угол равен 120° , $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;

в) двугранный угол равен 120° , $MN = MA = NB = x$.

994. Из точек M и N ребра двугранного угла в разных его гранях возведены перпендикуляры MK и NL . Определите величину двугранного угла, учитывая, что $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см и расстояние между точками K и L равно 50 см.

995. Сторона IJ треугольника IJK , у которого $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, лежит в плоскости p , а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Определите величину двугранного угла, образованного плоскостями p и IJK .

996. Найдите двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной $20\sqrt{3}$ см, а боковые рёбра равны 30 см каждое.

997. Отрезок длиной a с концами на двух перпендикулярных плоскостях образует с одной из них угол в 45° , а с другой — угол в 30° . Найдите часть линии пересечения плоскостей, заключённую между перпендикулярами, опущенными на неё из концов отрезка.

998. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 12 дм, а все боковые рёбра равны 24 дм. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.

999. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Боковое ребро против средней по величине стороны основания перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите величину двугранных углов при основании этой пирамиды.

1000. В треугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1001. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a , а все боковые рёбра — b . Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1002. В четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1003. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a , а все боковые рёбра — b . Найдите двугранные углы этой пирамиды.

1004. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} = -2\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}(x-y)} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$;

г) $\frac{\sin^3 a + \sin 3a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a$.

1005. Учитывая, что: $\operatorname{tg} a = \frac{7}{4}$ и $\operatorname{tg} b = \frac{9}{5}$, найдите:

а) $\operatorname{tg}(a+b)$;

в) $\operatorname{ctg}(a+b)$;

б) $\operatorname{tg}(a-b)$;

г) $\operatorname{ctg}(a-b)$.

1006. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 2\gamma - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos 2\gamma}$;

б) $\cos t \cdot \sin^{-1} t - \sin t \cdot \cos^{-1} t = 2 \operatorname{ctg}^2 2t$.

1007. Введя вспомогательный аргумент, например, $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, представьте произведением выражение:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 19^\circ$; в) $3 - \operatorname{tg}^2 z$; д) $\frac{3}{4} - \sin^2 t$;

б) $1 + \operatorname{ctg} 29^\circ$; г) $\frac{1}{4} - \sin^2 b$; е) $\frac{3}{4} - \cos^2 u$.

1008. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin a + \sin b + \sin (a - b)$; в) $1 + \sin g + \cos g$;

б) $\cos a + \cos b + \sin (a + b)$; г) $1 - \sin x - \cos x$.

1009. Найдите сумму:

а) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi$;

б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha$.

1010. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x-6}$; в) $5x^2 + 2013x + 2008 = 0$;

б) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{x-3}{x+3} + \frac{x-4}{x+4}$; г) $\frac{x^2-x+2}{3x^2-5x-14} = \frac{x^2-x+6}{3x^2-5x-10}$.

1011. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{x-1} < 1$; в) $\frac{2x-3}{3x-2} \leq \frac{4x-1}{x-4}$;

б) $\frac{2x^2}{x+1} > 1$; г) $|2x-1| + |3x-2| \geq 5x-3$.

1012. Ток в одной цепи равен 4 А, во второй — 11 А, а напряжения в них относятся как 2 : 7. Найдите мощности токов в первой и второй цепях, учитывая, что в третьей цепи, мощность и сила тока в которой соответственно равны суммарной мощности и суммарной силе токов в первой и второй цепях, напряжение составляет 170 В (рис. 419).

1013. Напряжение в одной цепи равно 160 В, во второй — 80 В, а токи в них относятся как 5 : 2. Найдите мощности токов в первой и второй цепях, учитывая, что в третьей цепи, мощность и напряжение в которой соответственно равны суммарной мощности и суммарному напряжению в первой и второй цепях, ток составляет 8 А (рис. 420).

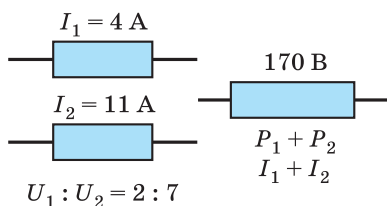


Рис. 419

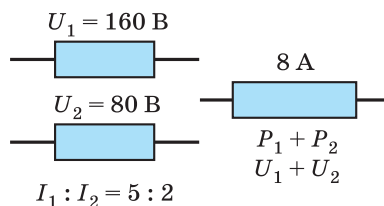


Рис. 420

1014. Решите уравнение

$$(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3.$$

1015. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL . Найдите величину угла A , учитывая, что прямая KL делит угол AKC пополам.

1016. На бумаге в клетку нарисован прямоугольник размерами $m \times n$, стороны которого идут по линиям сетки. Определите, при каких значениях переменных m и n этот прямоугольник можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

19. Функция $y = \sin x$

Мы знаем, что синусом числа x называется синус угла, равного x радиан.

Функция, которая задаётся формулой $y = \sin x$, где x — аргумент, называется **синусом**.

Теорема 1. Областью определения функции $y = \sin x$ является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, а областью значений — промежуток $[-1; 1]$.

Доказательство. Синус числа x есть ордината z точки $M_x(t, z)$ единичной окружности, полученной из точки $M_0(1; 0)$ поворотом на угол в x радиан (рис. 421). Поскольку поворот возможен на любой угол x как в положительном, так и в отрицательном направлениях, то областью определения функции $y = \sin x$ является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

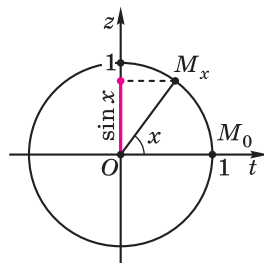


Рис. 421

Поскольку ордината точки единичной окружности принимает значения в пределах от -1 до 1 , то областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$.

Таким образом, график функции $y = \sin x$ расположен в полосе с границами $y = -1$ и $y = 1$.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом T , $T \neq 0$, если для любого значения аргумента x из области определения значения функции в точках x , $x - T$, $x + T$ равны друг другу, т. е. $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Число T при этом называется **периодом** функции $f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной** (соответственно нечётной), если для любого значения x из области определения

справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). График чётной функции симметричный относительно оси Oy , а график нечётной — относительно начала координат.

Теорема 2. *Функция $y = \sin x$ является нечётной и периодической, причём наименьшим положительным периодом является число 2π .*

Доказательство. Напомним, что функция f называется нечётной, если для любого значения x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. В соответствии с теоремой 1 параграфа 11 для любого числа x истинно равенство

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

а это позволяет утверждать, что функция $y = \sin x$ нечётная.

Числа x , $x - 2\pi$, $x + 2\pi$ на единичной окружности изображаются одной точкой. Поэтому этим числам соответствует одна и та же ордината, т. е. синусы чисел x , $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$ одинаковы:

$$\sin x = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi).$$

Это означает, что число 2π есть период синуса.

Остаётся доказать, что это число является наименьшим из положительных периодов этой функции. Пусть M — точка единичной окружности с ординатой 1 (рис. 422). Если двигаться в положительном направлении по единичной окружности, то ближайшей точкой с ординатой 1 будет эта же точка M , для чего придется пройти всю окружность, т. е. пройти путь длиной 2π . Получается, что положительный период функции $y = \sin x$ не может быть меньше 2π .

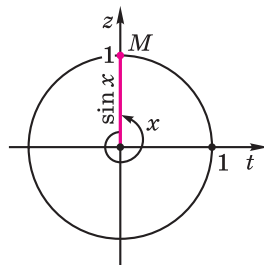


Рис. 422

Теорема 3. *Функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ и принимает нулевое значение при значениях аргумента x , равных $k\pi$, где k — любое целое число.*

Доказательство. Будем двигать точку M_x по единичной окружности от положения $M_{-\frac{\pi}{2}}$ до положения $M_{\frac{3\pi}{2}}$ и проследим за изменением ординаты этой точки. Эта ордината при движении до положения $M_{\frac{\pi}{2}}$ возрастает от -1 до 1 (рис. 423), а при дальнейшем движении до положения $M_{\frac{3\pi}{2}}$ убывает от 1 до -1 (рис. 424). При этом в положениях M_0 и M_π ордината становится равной нулю (рис. 425).

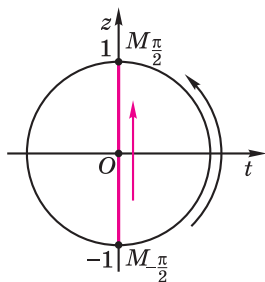


Рис. 423

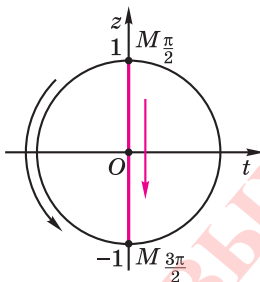


Рис. 424

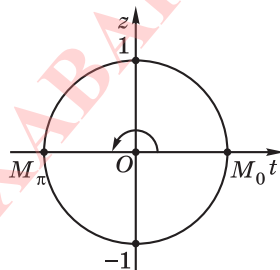


Рис. 425

Учитывая то, что периодом функции $y = \sin x$ является число 2π , получим, что эта функция ведёт себя так же и на любом промежутке, который получается из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ сдвигом влево или вправо на любое количество периодов, т. е. на число вида $2k\pi$, где k — число целое. Таким образом, на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до 1 , а на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ убывает от 1 до -1 . Учитывая период функции $y = \sin x$ и то, что число π получается из числа 0 поворотом на π , можем утверждать, что функция $y = \sin x$ в точках $k\pi$ примет нулевое значение.

Для приближенного построения графика функции $y = \sin x$, который называется *синусоидой*, можно использовать такой приём. Разделим первую четверть единичной окружно-

сти на 8 долей и на столько же долей отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс, расположив окружность так, как показано на рисунке 426. Через точки деления дуги проведём прямые, параллельные оси абсцисс, и отметим точки их пересечения с соответствующими прямыми, проведёнными параллельно оси ординат через точки деления отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс. Эти 8 точек принадлежат графику функции $y = \sin x$. Соединим их плавной кривой и получим часть искомой синусоиды на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь учтём, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Это означает, что график синуса симметричен относительно прямой $y = \frac{\pi}{2}$. В результате получим часть синусоиды на промежутке $[0; \pi]$ (рис. 427).

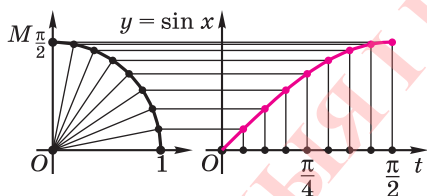


Рис. 426

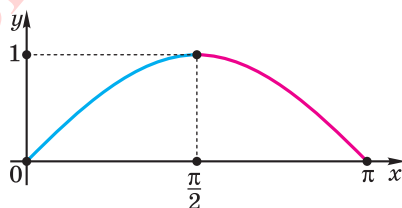


Рис. 427

Используя нечётность синуса, получим часть синусоиды на промежутке $[-\pi; 0]$ симметричным отражением построенной части синусоиды относительно начала координат (рис. 428).

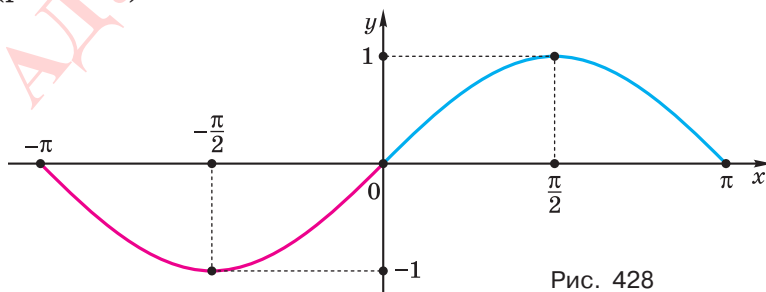


Рис. 428

Мы построили синусоиду на промежутке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π , равной периоду синуса. Это позволяет теперь получить график синуса на всей координатной прямой параллельными переносами построенной кривой (рис. 429).

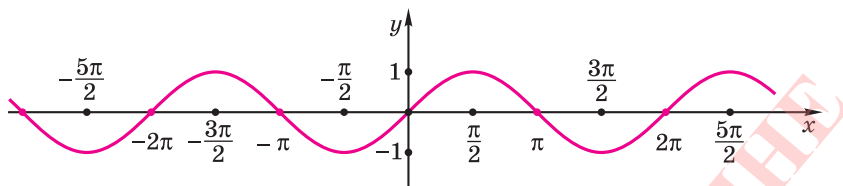


Рис. 429

Теорема 4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. Найдём приращение Δy функции $y = \sin x$, соответствующее приращению аргумента Δx , а затем отношение приращений функции и аргумента:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Значит,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Если Δx стремится к нулю, то $\frac{\Delta x}{2}$ также стремится к нулю, а $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ стремится к $\cos x$.

Значение выражения $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ стре-

мится к единице, когда Δx стремится к нулю. Убедимся в этом, используя геометрические соображения. Пусть центральный угол величиной в Δx радиан опирается на дугу AB окружности с радиусом R (рис. 430). Тогда длина этой дуги равна

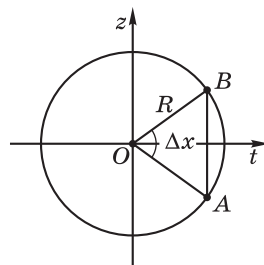


Рис. 430

$2R \cdot \frac{\Delta x}{2}$, а длина хорды AB , стягивающей эту дугу, — $2R \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$. Поэтому

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{2R \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{2R \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{AB}{\cup AB}.$$

Если Δx стремится к нулю, то длина хорды AB приближается к длине дуги AB , а значит, их отношение приближается к единице.

Таким образом,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

► **Теорема 5.** $|\sin x| < |x|$ при любых значениях переменной x , отличных от нуля, и $\sin x \approx x$ при значениях переменной x , близких к нулю.

Доказательство. Пусть центральный угол AOB единичной окружности равен x (рис. 431). Из конца A радиуса OA опустим перпендикуляр AC на другой радиус OB . Тогда $\sin x = AC$. Вместе с этим $AC < AB < \cup AB$, а $\cup AB = x$, так как радиус окружности равен 1. Значит, если $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.

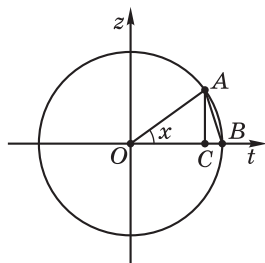


Рис. 431

Поскольку синус — нечётная функция, то $x < \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$. Значит, если $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, то $|\sin x| < |x|$.

Если $x = 0$, то $|\sin x| = |x|$.

Таким образом, если $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$, то неравенство $|\sin x| < |x|$ доказано.

Пусть $|x| > \frac{\pi}{2}$. Тогда, учитывая, что $|\sin x| \leq 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$, получим, что $|\sin x| < |x|$ и при этих значениях переменной x .

Убедимся в истинности второй части утверждения теоремы. Поскольку $\sin x = AC$ и $x = \cup AB$, то при приближении

значения переменной x к нулю длина отрезка AC и дуги AB приближаются друг к другу, а это и означает, что $\sin x \approx x$.

Рассмотрим функцию, обратную синусу. В параграфе 13 мы называли арксинусом числа a такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Функция, которая задаётся формулой $y = \arcsin x$, где x — аргумент, называется **арксинусом**.

Теорема 6. *Функция $y = \arcsin x$ имеет следующие свойства:*

- а) областью определения имеет промежуток $[-1; 1]$;*
- б) областью значений имеет промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;*
- в) является нечётной;*
- г) возрастает на $[-1; 1]$;*
- д) график симметричен части графика синуса на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.*

Доказательство. а) и б) Проектирование вдоль оси абсцисс устанавливает взаимно однозначное соответствие между отрезком $M_{-\frac{\pi}{2}} M_{\frac{\pi}{2}}$, который представляет числа промежутка $[-1; 1]$ оси синусов, и дугой $M_{-\frac{\pi}{2}} M_{\frac{\pi}{2}}$ тригонометрической окружности, которая представляет

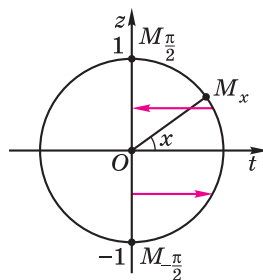


Рис. 432

числа промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 432). А это означает, что областью определения функции $y = \arcsin x$ является промежуток $[-1; 1]$, а областью значений — промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

в) В соответствии с теоремой 5 параграфа 13 для чисел из промежутка $[-1; 1]$ истинно равенство $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, а это означает, что функция $y = \arcsin x$ является нечётной.

г) Пусть числа x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[-1; 1]$ и $x_1 < x_2$. Докажем, что $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Допустим,

что $\arcsin x_1 \geq \arcsin x_2$. Учитывая, что числа $\arcsin x_1$ и $\arcsin x_2$ оба принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция синус возрастает, получим, что $\sin(\arcsin x_1) \geq \sin(\arcsin x_2)$, или $x_1 \geq x_2$. Но это противоречит условию.

д) Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции синус, причём число a принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что $\sin a = b$. Но в этом случае $a = \arcsin b$. Это означает, что точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции арксинус (рис. 433).

График функции $y = \arcsin x$ представлен на рисунке 434. ◀

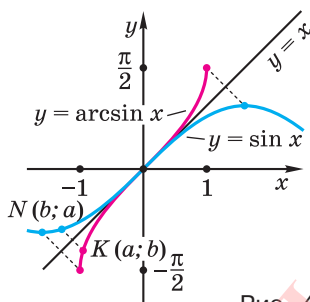


Рис. 433

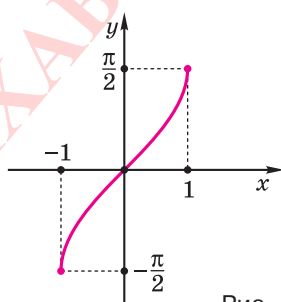


Рис. 434



1. Какую зависимость называют функцией?
2. Какое множество называют областью определения функции; областью значений функции?
3. Какая функция называется возрастающей на множестве K ; убывающей на множестве K ?
4. Какую функцию называют чётной; нечётной?
5. Какую функцию называют периодической? Какое число называют периодом функции?
6. Какое множество является областью определения синуса; областью значений синуса?
7. Какое число является периодом синуса?
8. Какой зависимостью связаны значения синуса для противоположных значений аргумента?
9. На каких промежутках синус возрастает; на каких убывает?
10. При каких значениях аргумента синус принимает нулевое значение?
11. Какая функция является производной синуса?
12. Каким неравенством связаны значения функций $y = \sin x$ и $y = x$?
13. Как связаны значения функций $y = \sin x$ и $y = x$ при близких к нулю значениях переменной x ?

1017. Начертите единичную окружность, отметьте на ней точку, соответствующую указанному числу, и запишите её координаты:

- а) 0; в) π ; д) 2π ; ж) $\frac{3\pi}{4}$;
 б) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{\pi}{4}$.

1018. По рисунку 435 запишите формулой все числа, которые соответствуют точке:

- а) M_1 ; г) M_4 ; ж) M_7 ;
 б) M_2 ; д) M_5 ; з) M_8 .
 в) M_3 ; е) M_6 ;

1019. Запишите синус числа:

- а) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; и) $\frac{7\pi}{6}$;
 б) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.
 в) $\frac{\pi}{3}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$;
 г) $-\frac{\pi}{3}$; з) $-\frac{5\pi}{6}$;

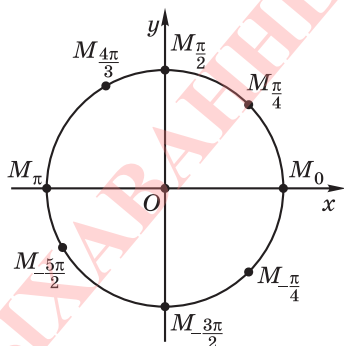


Рис. 435

1020. Запишите синус числа:

- а) 0; в) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{3\pi}{4}$; и) $\frac{5\pi}{4}$;
 б) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{5\pi}{4}$.

1021. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \sin x$ при значении переменной x , равном:

- а) $\frac{7\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; к) 2;
 б) $\frac{5\pi}{4}$; д) $\frac{5\pi}{6}$; з) $\frac{10\pi}{3}$; л) 3;
 в) $-\frac{3}{4}\pi$; е) $\frac{11\pi}{6}$; и) $-\frac{5\pi}{3}$; м) 4.

1022. Используя график функции, приведённый на рисунке 436, и её свойства, определите, как изменяется значение функции $y = \sin x$, когда аргумент изменяется:

- а) от 0 до π ; в) от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$;
 б) от $-\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; г) от $\frac{3\pi}{2}$ до 3π .

1023. Используя график функции $y = \sin x$, приведённый на рисунке 436, определите, что больше:

- а) $\sin 0,5$ или $\sin 1$; б) $\sin (-0,2)$ или $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

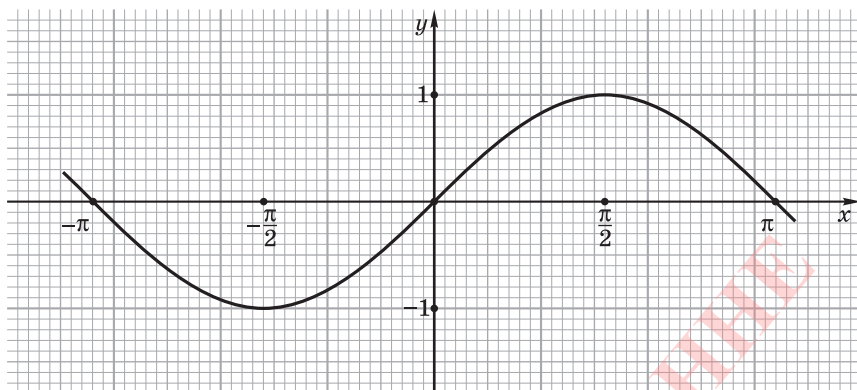


Рис. 436

в) $\sin 2$ или $\sin 3$;

д) $\sin \frac{\pi}{3}$ или $\sin 1$;

г) $\sin(\pi - 1)$ или $\sin 1$;

е) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ или $\sin 1$.

1024. Используя рисунок 437, на котором приведён график функции $y = \sin x$, запишите:

а) 3 точки максимума;

б) 3 точки минимума.

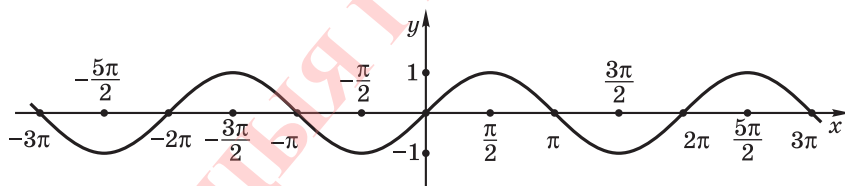


Рис. 437

1025. По рисунку 436 найдите значение синуса для аргумента x , равного:

а) 1;

в) 2;

д) 3;

ж) 1,5;

и) 2,8;

б) -1;

г) -2;

е) -3;

з) -1,5;

к) -2,8.

1026. Используя график функции $y = \sin x$, приведённый на рисунке 436, и её свойства, определите, в скольких точках пересекает синусоиду график функции:

а) $y = x$;

г) $y = -\frac{1}{2}x$;

ж) $y = x^2$;

к) $y = -x^3$;

б) $y = -x$;

д) $y = 2x$;

з) $y = -x^2$;

л) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = \frac{1}{2}x$;

е) $y = -2x$;

и) $y = x^3$;

м) $y = -\sqrt{x}$.

1027. Запишите множество значений функции $y = \sin x$, учитывая, что значение аргумента x принадлежит множеству:

- а) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$;
б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

1028. Используя синусоиду, изображённую на рисунке 436, и свойства синуса на промежутке $[-\pi; \pi]$, решите уравнение:

- а) $\sin x = -1$; в) $\sin x = 0,4$; д) $\sin x = \sqrt{2}$;
б) $\sin x = 0,7$; г) $\sin x = -0,4$; е) $\sin x = -\sqrt{3}$.

1029. Используя график функции $y = \sin x$, приведённый на рисунке 436, и её свойства, укажите значение аргумента, при котором синус равен $\frac{1}{2}$, а аргумент принадлежит промежутку:

- а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

1030. Докажите, что истинно равенство:

- а) $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{25\pi}{6}$; д) $\sin (x - \pi) = \sin (x + \pi)$;
б) $\sin \left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{7}\right)$; е) $\sin (2x + 2\pi) = \sin (2x - 8\pi)$;
в) $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{32\pi}{5}$; ж) $\sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;
г) $\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; з) $\sin (7\pi - t) = \sin (3\pi - t)$.

1031. Используя графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$, приведённые на рисунке 438, укажите два промежутка, на которых:

- а) $\sin x > \frac{1}{2}$; в) $\sin x \geq \frac{1}{2}$;
б) $\sin x < \frac{1}{2}$; г) $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

1032. Найдите значение функции $y = \arcsin x$ при значении аргумента x , равном:

- а) -1 ; в) 1 ; д) $-\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
б) 0 ; г) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

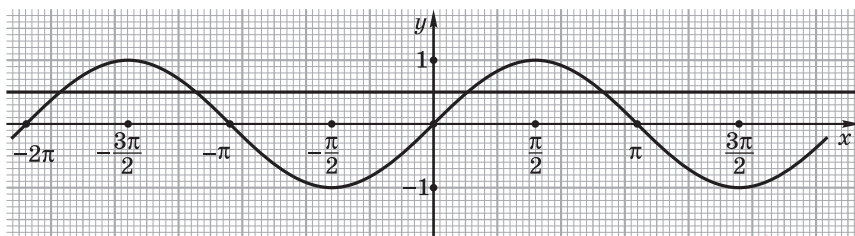


Рис. 438

1033. Используя микрокалькулятор или таблицы, найдите значение функции $y = \sin x$ при значении аргумента x , равном:

- | | | | |
|-------------|------------|------------|--------------|
| а) 0,3284; | г) -2,346; | ж) 145,8; | к) -1988; |
| б) -0,3284; | д) 13,45; | з) -946,3; | л) 0,002984; |
| в) 14,894; | е) -18,42; | и) 5472; | м) 0,02845. |

1034. Используя калькулятор или таблицы, найдите значение функции $y = \arcsin x$ при значении аргумента x , равном:

- | | | |
|-------------|---------------|-------------|
| а) 0,9248; | г) -0,004354; | ж) -0,2004; |
| б) -0,9248; | д) 0,9888; | з) -0,6831. |
| в) 0,1898; | е) -0,1111; | |

1035. На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ решите уравнение:

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\sin x = 0$; | г) $\sin x = 1$; | ж) $\sin x = -\frac{1}{2}$; |
| б) $\sin x = \frac{1}{2}$; | д) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | з) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | е) $\sin x = -1$; | и) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. |

1036. На промежутке $[-\pi; \pi]$ решите неравенство:

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| а) $\sin x > \frac{1}{2}$; | д) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | и) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| б) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; | е) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; | к) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| в) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | ж) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | л) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| г) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; | з) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | м) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. |

1037. На прямых m и n , которые перпендикулярны плоскости и пересекают её в точках M и N , взяты такие точки K и L , что $KM = 27$ см, $LN = 48$ см. Найдите отрезок KL , учитывая, что $MN = 29$ см.

1038. Из точки A к плоскости проведён перпендикуляр AB и наклонные AC и AD , проекции которых перпендикулярны друг другу. Найдите высоту CG треугольника ACD , учитывая, что $AB = 45$ см, $BC = 48$ см, $BD = 60$ см.

1039. Из точки к плоскости проведены две наклонные длинами 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, учитывая, что проекции относятся как 2 : 3.

1040. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α , а основание BC отстоит от неё на 20 см (рис. 439). Найдите расстояние от точки P пересечения диагоналей трапеции до плоскости α , учитывая, что $AD : BC = 7 : 3$.

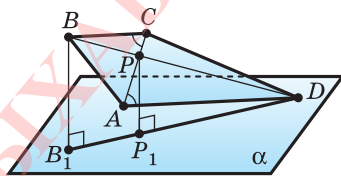


Рис. 439

1041. Точка D лежит на прямой, проходящей через вершину B треугольника ABC и перпендикулярной его плоскости. Учитывая, что $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см, найдите:

- расстояние от точки D до прямой AC ;
- площадь треугольника ACD .

1042. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC с катетами CB и CA , равными 20 см и 30 см, возведён перпендикуляр CD к плоскости треугольника длиной 10 см. Найдите площадь треугольника ABD .

1043. На отрезке AB выбрана точка T , и на полученных отрезках-частях TA и TB как на образующих построены такие конусы, что их боковые поверхности равны 195π см² и 45π см², а радиус основания первого конуса на 8 см больше. Когда на отрезке A_1B_1 , равном отрезку AB , как на образующей построили третий конус с боковой поверхностью 240π см², то радиус его основания оказался равным 10 см (рис. 440). Учитывая, что боковая поверх-

ность S_6 конуса с радиусом основания r и образующей l определяется формулой $S_6 = \pi r l$, найдите:

- образующие и радиусы оснований конусов;
- полные поверхности конусов;
- высоты конусов, т. е. перпендикуляры, опущенные из вершин конусов на их основания.

1044. На отрезке MN выбрана точка A , и на полученных отрезках-частях AM и AN как на диаметрах оснований построены такие конусы, что их боковые поверхности равны $60\pi \text{ см}^2$ и $180\pi \text{ см}^2$, а образующая первого конуса на 10 см меньше. Когда на отрезке MN как на диаметре основания построили третий конус с боковой поверхностью $240\pi \text{ см}^2$, то его образующая оказалась равной 16 см (рис. 441). Найдите:

- образующие и радиусы оснований конусов;
- полные поверхности конусов;
- высоты конусов.

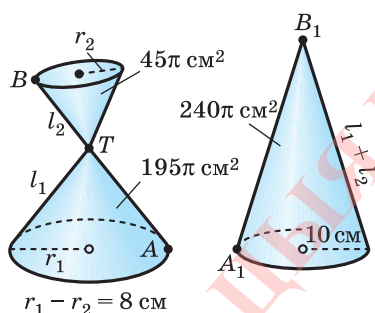


Рис. 440

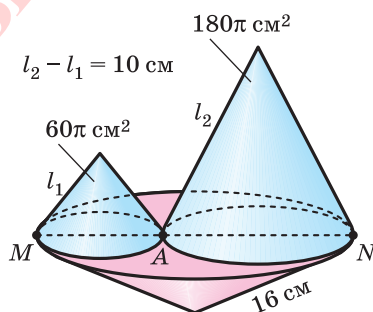


Рис. 441

1045. Докажите, что если многогранник имеет B вершин, P рёбер и Γ граней и каждая грань имеет с шаром единственную общую точку, то $B - P + \Gamma = 2$.

1046. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, стороны AB и BC равны и расстояние от точки B до прямой AD равно d . Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

1047. Найдите количество и сумму цифр в десятичной записи произведения $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \dots \cdot 99\dots 9$, учитывая, что в каждом следующем множителе количество цифр вдвое большее, чем в предыдущем, а в последнем их 2^{2008} .

20. Функция $y = \cos x$

В соответствии с определением косинусом числа x называется косинус угла, равного x радиан.

Функция, заданная формулой $y = \cos x$, где x — аргумент, называется **косинусом**.

Теорема 7. *Функция $y = \cos x$ имеет следующие свойства:*

а) областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;

б) областью значений является промежуток $[-1; 1]$;

в) является чётной;

г) является периодической, причём наименьшим положительным периодом является число 2π ;

д) $(\cos x)' = -\sin x$;

е) возрастает от -1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$ и убывает от 1 до -1 на промежутках $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ и принимает нулевое значение при значениях аргумента x , равных $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число.

Доказательство. Свойства *а), б) и в)* обосновываются так же, как и соответствующие свойства синуса.

г) Поскольку $\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x + 2\pi)$, то число 2π является периодом косинуса. Это наименьший положительный период. Действительно, если двигаться по единичной окружности от точки M_0 в положительном направлении, то ближайшей точкой с абсциссой 1 будет эта же точка M_0 , для чего придётся пройти путь длиной 2π .

д) Учитывая, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и то, что $(\sin x)' = \cos x$, получим:

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)' = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

е) На промежутке $(-\pi; 0)$ $\sin x < 0$, поэтому $(\cos x)' = -\sin x > 0$. Значит, на этом промежутке функция косинус возрастает. На промежутке $(0; \pi)$ $\sin x > 0$, поэтому $(\cos x)' = -\sin x < 0$, и, значит, на этом промежутке функция косинус убывает.

Это свойство мы усматриваем из рисунков 442 и 443. При этом в положениях $M_{-\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{\pi}{2}}$ ордината становится равной нулю (рис. 444).

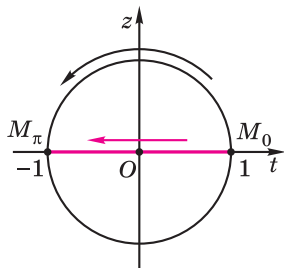


Рис. 442

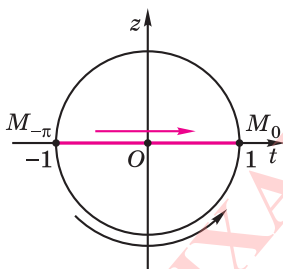


Рис. 443

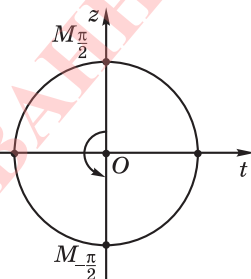


Рис. 444

Теперь учтём, что периодом функции $y = \cos x$ является число 2π . Это позволяет утверждать, что на любом из промежутков $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$ функция $y = \cos x$ возрастает от -1 до 1 , а на любом из промежутков $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ убывает от 1 до -1 .

Установленных свойств достаточно, чтобы построить график косинуса. Его можно получить и из таких соображений. Обратим внимание на то, что при любом значении переменной x истинно равенство $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Оно показывает, что график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 445).

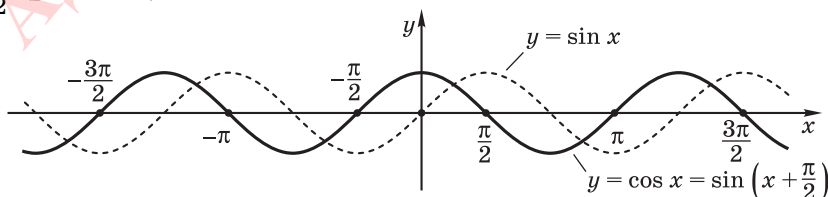


Рис. 445

На графике косинуса, изображённом на рисунке 446, легко усматриваются уже доказанные и другие свойства функции $y = \cos x$.

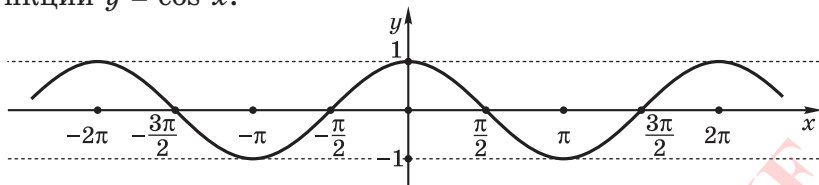


Рис. 446

► **Теорема 8.** При значениях переменной x , близких к нулю, истинно приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, причём $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, если $x \neq 0$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 5 $\sin x \approx x$ при близких к нулю значениях x . Поскольку $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, то $\cos x \approx \sqrt{1 - x^2}$. Теперь к функции $f(t) = \sqrt{1 + t}$ применим приближенную формулу $f(t_0 + t) \approx f(t_0) + f'(t_0) t$, установленную в параграфе 7. Имеем $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда $f(t_0) = 1$ и $f'(t_0) = \frac{1}{2}$. Поэтому при близких к нулю значениях t истинно приближенное равенство $\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2}$. При значении $t_0 = -x^2$ получаем $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Значит, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Для доказательства неравенства $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ рассмотрим функцию $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$. Найдём производную этой функции: $g'(x) = -\sin x + x$. В соответствии с теоремой 5, если $x < 0$, то $\sin x > x$, а если $x > 0$, то $\sin x < x$. Поэтому $g'(x) < 0$, если $x < 0$ и $g'(x) > 0$, если $x > 0$. Это означает, что функция $g(x)$ при $x < 0$ убывает, а при $x > 0$ возрастает. Поэтому в точке $x = 0$ она принимает своё наименьшее значение, которое равно нулю. Получается, что $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) > 0$ при $x \neq 0$, т. е. если $x \neq 0$, то $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Рассмотрим функцию, обратную косинусу.

Функция, которая задаётся формулой $y = \arccos x$, где x — аргумент, называется **арккосинусом**.

Теорема 9. *Функция $y = \arccos x$ имеет следующие свойства:*

- а) областью определения является промежуток $[-1; 1]$;
- б) областью значений является промежуток $[0; \pi]$;
- в) не является ни чётной, ни нечётной;
- г) является убывающей;

д) график арккосинуса симметричен части графика косинуса на промежутке $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$.

Доказательство. а) и б) Проектирование вдоль оси ординат устанавливает взаимно однозначное соответствие между отрезком M_0M_π , который представляет числа промежутка $[-1; 1]$ оси косинусов, и дугой M_0M_π тригонометрической окружности, которая представляет числа промежутка $[0; \pi]$ (рис. 447). А это означает, что областью определения функции $y = \arccos x$ является промежуток $[-1; 1]$, а областью значений — промежуток $[0; \pi]$.

в) Поскольку $\arccos(-1) = \pi$ и $\arccos 1 = 0$, то $\arccos(-1) \neq \arccos 1$ и $\arccos(-1) \neq -\arccos 1$. Поэтому функция арккосинус не может быть чётной и не может быть нечётной.

Свойства г) и д) доказываются аналогично свойствам г) и д) теоремы 6. Проведите эти доказательства самостоятельно. Рисунок 448 иллюстрирует свойство д).

График арккосинуса представлен на рисунке 449. ◀

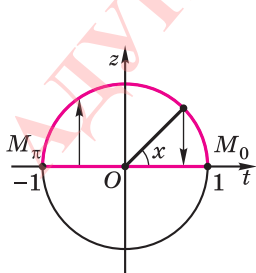


Рис. 447

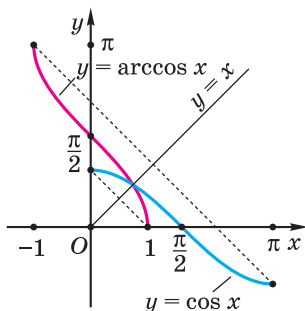


Рис. 448

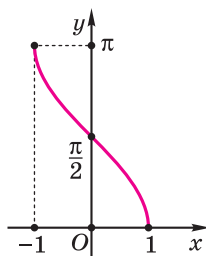


Рис. 449

Пример. Докажем, что $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку $\frac{2}{\sqrt{13}} > 0$ и $\frac{5}{\sqrt{26}} > 0$, то с учётом определений арксинуса и арккосинуса соответственно выражения $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}$ представляют такие числа x и y , что:

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ и } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \cos y = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Сложив почленно неравенства $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$, получим, что число $x + y$ удовлетворяет условию:

$$0 < x + y < \pi.$$

На промежутке $[0; \pi]$ косинус убывает, т. е. каждое своё значение принимает только один раз. Это позволяет однозначно по значению косинуса указать значение его аргумента. Поэтому найдём сначала $\cos(x + y)$, а затем и $x + y$:

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \\ &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cos\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) - \\ &- \sin\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \sin\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right)} \cdot \\ &\cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sin \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right)} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$x + y = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4},$$

что и требовалось доказать.



1. Какое множество является областью определения косинуса; областью значений косинуса?
2. Какое число является периодом косинуса?
3. Какой зависимостью связаны значения косинуса для противоположных значений аргумента?
4. На каких промежутках косинус возрастает; на каких убывает?
5. При каких значениях аргумента косинус принимает нулевое значение?
6. Какая функция является производной косинуса?

7. Как называется функция, обратная косинусу?

8. Как можно приближенно вычислять значения косинуса для аргументов, близких к нулю?

1048. Начертите тригонометрическую окружность, отметьте на ней точку, соответствующую числу, и запишите её координаты:

а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$;

б) $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$; з) $-\frac{7\pi}{6}$.

1049. Используя график функции, приведённый на рисунке 450, и её свойства, определите, как изменяется значение функции $y = \cos x$, когда аргумент изменяется:

а) от 0 до π ; в) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$;

б) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$; г) от $\frac{3\pi}{2}$ до 3π .

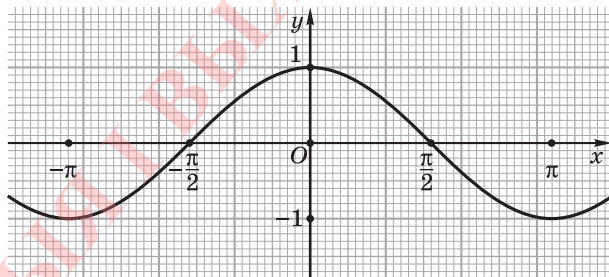


Рис. 450

1050. Используя график функции $y = \cos x$ и её свойства, найдите значение функции при значении аргумента x , равном:

а) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; д) 6π ; ж) -17π ;

б) $\frac{3\pi}{2}$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; е) -6π ; з) 24π .

1051. Запишите косинус числа:

а) 0; д) $\frac{\pi}{6}$; и) $\frac{3\pi}{4}$; н) $\frac{7\pi}{6}$;

б) $-\pi$; е) $-\frac{\pi}{6}$; к) $-\frac{3\pi}{4}$; о) $-\frac{7\pi}{6}$;

в) $\frac{\pi}{2}$; ж) $\frac{\pi}{3}$; л) $\frac{5\pi}{6}$; п) $\frac{5\pi}{4}$;

г) $-\frac{\pi}{2}$; з) $-\frac{\pi}{3}$; м) $-\frac{5\pi}{6}$; р) $-\frac{5\pi}{4}$.

1052. Используя график функции $y = \cos x$, приведённый на рисунке 450, и её свойства, определите количество точек его пересечения с графиком функции:

- а) $y = x$; в) $y = 2x$; д) $y = x^3$;
 б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = -x^2$; е) $y = -\sqrt{x}$.

1053. Определите, истинно ли равенство:

- а) $\cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$; д) $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{25\pi}{6}$;
 б) $\cos(2x + 2\pi) = \cos(2x - 8\pi)$; е) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;
 в) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ж) $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{32\pi}{5}$;
 г) $\cos(7\pi - t) = \cos(3\pi - t)$; з) $\cos \frac{11\pi}{4} = \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

1054. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \cos x$ при значении переменной x , равном:

- а) $\frac{7\pi}{9}$; в) $\frac{91\pi}{36}$; д) $-\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{631\pi}{12}$;
 б) $\frac{71\pi}{36}$; г) $\frac{13\pi}{5}$; е) $\frac{11\pi}{7}$; з) $-\frac{1024\pi}{7}$.

1055. Используя график функции $y = \cos x$, приведённый на рисунке 450, определите, что больше:

- а) $\cos 0,5$ или $\cos 1$; г) $\cos(\pi - 1)$ или $\cos 1$;
 б) $\cos(-0,2)$ или $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\cos \frac{\pi}{3}$ или $\cos 1$;
 в) $\cos 2$ или $\cos 3$; е) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ или $\cos 1$.

1056. Используя возрастание или убывание функции $y = \cos x$, сравните числа:

- а) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{8\pi}{9}$; г) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;
 б) $\cos \frac{8\pi}{7}$ и $\cos \frac{10\pi}{7}$; д) $\cos 1$ и $\cos 3$;
 в) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; е) $\cos 4$ и $\cos 5$.

1057. Используя формулы приведения, позволяющие синус выразить через косинус, сравните числа:

- а) $\cos \frac{\pi}{5}$ и $\sin \frac{\pi}{5}$; в) $\cos \frac{5\pi}{8}$ и $\sin \frac{5\pi}{8}$; д) $\cos \frac{\pi}{6}$ и $\sin \frac{5\pi}{14}$;
 б) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{\pi}{7}$; г) $\sin \frac{3\pi}{5}$ и $\cos \frac{3\pi}{5}$; е) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\sin \frac{3\pi}{10}$.

1058. Запишите множество значений функции $y = \cos x$, учитывая, что значения аргумента x принадлежат множеству:

- а) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$;
 б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

1059. Используя графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{2}$, приведённые на рисунке 451, укажите два промежутка, на которых:

- а) $\cos x > \frac{1}{2}$; в) $\cos x \geq \frac{1}{2}$;
 б) $\cos x < \frac{1}{2}$; г) $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

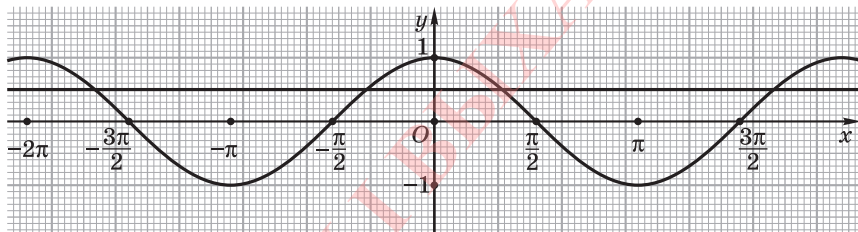


Рис. 451

1060. Используя рисунок 452, на котором приведён график функции $y = \cos x$, запишите формулу, представляющую все точки:

- а) максимума; б) минимума.

1061. Используя рисунок 452, на котором представлен график функции $y = \cos x$, запишите 3 промежутка, на которых косинус:

- а) положителен; в) неположителен;
 б) отрицателен; г) неотрицателен.

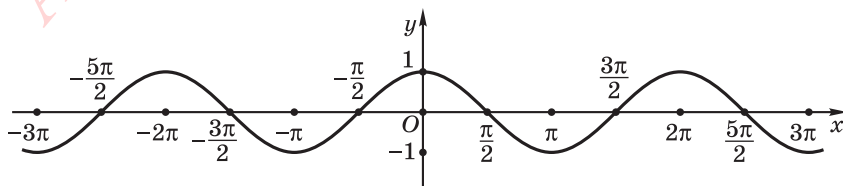


Рис. 452

1062. По рисунку 450 найдите значение косинуса для аргумента x , равного:

- а) 1; в) 3; д) -3; ж) -1,5; и) -2,7.
 б) 2; г) -2; е) 1,5; з) 2,7;

1063. Используя калькулятор, найдите значение функции $y = \cos x$ при значении аргумента x , равном:

- а) 0,3284; г) -2,346; ж) 145,8; к) -1988;
 б) -0,3284; д) 13,45; з) -946,3; л) 0,002984;
 в) 14,894; е) -18,42; и) 5472; м) 0,02845.

1064. Найдите значение функции $y = \arccos x$ при значении аргумента x , равном:

- а) -1; в) 1; д) $-\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 б) 0; г) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

1065. Используя график функции $y = \arccos x$, представленный на рисунке 453, найдите значение функции $y = \arccos x$ при значении аргумента x , равном:

- а) 0,6; г) -0,3;
 б) -0,6; д) 0,1;
 в) 0,3; е) -0,1.

1066. Используя калькулятор, найдите значение функции $y = \arccos x$ при значении аргумента x , равном:

- а) 0,9248; д) 0,9888;
 б) -0,9248; е) -0,1111;
 в) 0,1898; ж) -0,2004;
 г) -0,004354; з) -0,6831.

1067. Учитывая, что при использовании приближенного равенства $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ для чисел, модули которых не превышают 1, относительная погрешность меньше $5x^3 \%$, найдите приближенное значение косинуса числа и оцените погрешность вычисления:

- а) 0,01; б) 0,05; в) 0,1; г) 0,5.

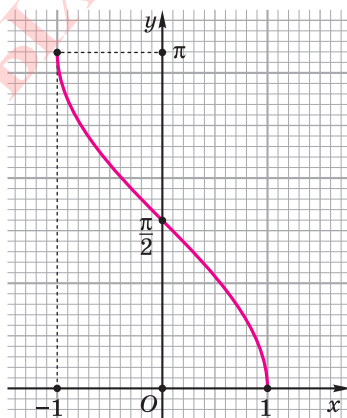


Рис. 453

1068. На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ решите уравнение:

а) $\cos x = 0$; г) $\cos x = 1$; ж) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos x = \frac{1}{2}$; д) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x = -1$; и) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1069. Докажите, что функция $y = \arccos x$ является убывающей.

1070. Докажите, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.

1071. Докажите, что истинно равенство:

а) $2 \arcsin \frac{2}{7} = \arccos \frac{41}{49}$;

б) $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6+1}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

д) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14}\right)$;

е) $\arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28$;

ж) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arccos \frac{2}{11}$;

з) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right) = \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$.

1072. Решите уравнение:

а) $\arcsin x = 2 \arcsin a$; в) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \arcsin a$;

б) $\arccos x = 2 \arcsin a$; г) $\arccos x = \arcsin 2a$.

1073. Диагонали прямоугольного параллелепипеда $KL MN K_1 L_1 M_1 N_1$ и диагонали его основания пересекаются в точках O и Q соответственно. Определите, перпендикулярны ли:

а) прямые OQ и KL ; в) прямая OQ и плоскость MNK .

б) прямые KK_1 и LN ;

1074. Через центр тяжести G грани QCD треугольной пирамиды $QBCD$, боковое ребро QB которой перпендикулярно основанию BCD , проведена прямая l , перпендикулярная плоскости BCD . Постройте точку пересечения прямой l с плоскостью основания.

1075. Точка T — середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку T перпендикулярно прямой BD , учитывая, что $AD = a$, $AA_1 = b$.

1076. К плоскости ϕ из точек A , B , C , которые лежат по одну сторону от ϕ , проведены три перпендикуляра — AA_1 длиной 1, BB_1 длиной 2, CC_1 длиной 3, основания которых образуют на плоскости ϕ равносторонний треугольник. Найдите вид треугольника ABC .

1077. Учтывая, что точки R и Q — середины рёбер A_1B_1 и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с ребром основания 20 и боковым ребром 24, определите:

а) является ли отрезок CQ проекцией отрезка CB_1 на плоскость AA_1C ;

б) площадь треугольника BC_1R .

1078. Используя рисунок 454, докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на её боковое ребро.

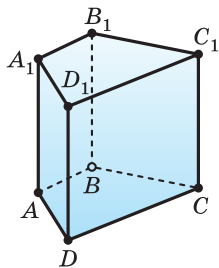


Рис. 454

1079. Есть две прямые призмы, у которых периметры оснований равны 24 см и 36 см, а боковые рёбра относятся как 4 : 5. Чтобы третья прямая призма имела периметр основания 60 см, а боковую поверхность равной сумме боковых поверхностей первой и второй призм, её боковое ребро должно быть равным 23 см. Найдите боковые рёбра первой и второй призм и их боковые поверхности.

1080. Пути, которые товарный поезд прошёл за 3 ч с одной скоростью и 9 ч с другой, относятся как 2 : 3. Найдите эти пути и сами скорости, учитывая, что средняя скорость поезда оказалась равной 45 км/ч.

1081. Решите уравнение

$$x^2(1 + x^2)^2 + y^2(1 + y^2)^2 = 8x^2y^2.$$

1082. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O , причём $OB = OC$. Найдите отрезок AB , учитывая, что $\angle AOB = \alpha$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен R .

1083. Определите, при каких натуральных значениях переменной n точным квадратом является число:

- а) $5^n + 4^n$; б) $5^n - 4^n$.

21. Функция $y = \operatorname{tg} x$

Функция, заданная формулой $y = \operatorname{tg} x$, где x — аргумент, называется **тангенсом**.

Теорема 10. Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет следующие свойства:

а) областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, из которого исключены числа вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число;

б) областью значений является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;

в) является периодической с наименьшим положительным периодом π ;

г) является нечётной;

д) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

е) возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, где k — целое число.

Доказательство. а) В область определения тангенса входят все действительные числа, за исключением тех, которые соответствуют точкам пересечения единичной окружности с осью ординат (рис. 455), т. е. за исключением чисел $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — целое число.

б) В параграфе 13 доказано, что тангенс числа x равен координате точки N оси тангенсов (рис. 456). Понят-

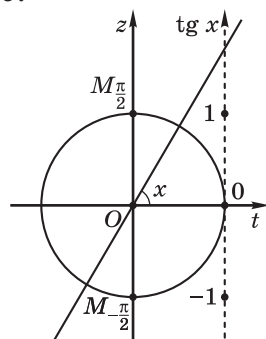


Рис. 455

но, что любое число оси тангенсов является значением тангенса. Поэтому область значений тангенса есть множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

в) Поскольку $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, то число π является периодом тангенса.

Это наименьший положительный период, так как на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс каждое своё значение принимает только один раз (рис. 457).

г) Свойство следует из равенства $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, которое доказано в теореме 3 параграфа 11.

д) Учитывая, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и то, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

е) Поскольку тангенс — периодическая функция, то достаточно исследовать, как он ведёт себя на промежутке длиной, равной периоду π . Удобно в качестве такого промежутка взять промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Как уже установлено, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Но $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$, поэтому на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает.

Полученный результат можно усмотреть и из тех соображений, что тангенс любого действительного числа изображается некоторой точкой оси тангенсов (рис. 458). По этому рисунку видно,

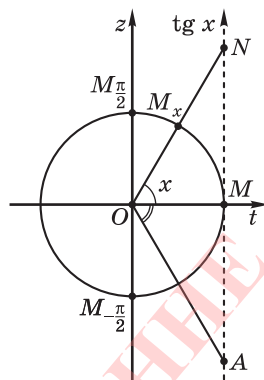


Рис. 456

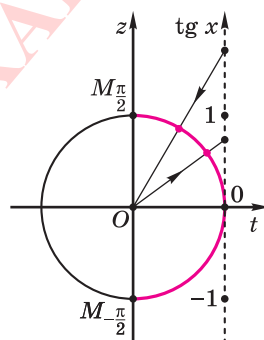


Рис. 457

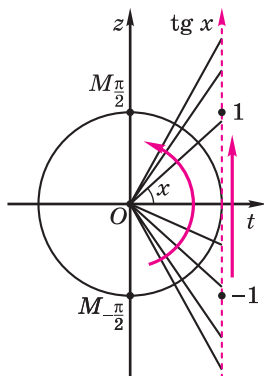


Рис. 458

что если аргумент x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Учитывая, что периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ является число π , можно утверждать, что на любом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Установленные свойства в общих чертах дают представление о поведении тангенса на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Для уточнения хода графика используем геометрическое построение, аналогичное описанному в параграфе 19 при построении графика синуса. Ход этого построения легко усматривается из рисунка 459. С учётом нечётности тангенса, отразив построенную часть графика относительно начала координат, получим график тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 460). Учёт периодичности тангенса даёт его график в области определения (рис. 461).

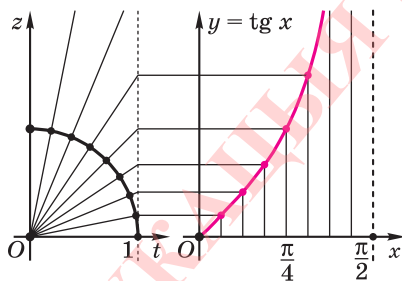


Рис. 459

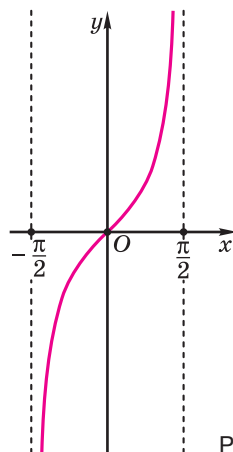


Рис. 460

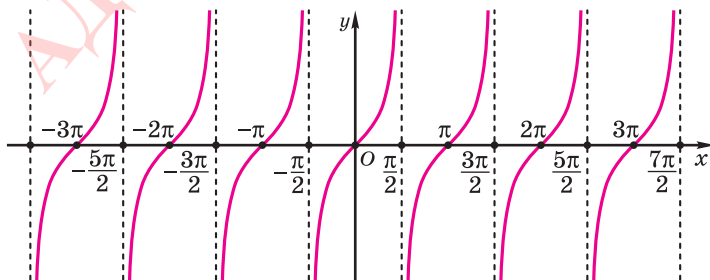


Рис. 461

► Рассмотрим функцию, обратную тангенсу.

Функция, которая задаётся формулой $y = \operatorname{arctg} x$, где x — аргумент, называется **арктангенсом**.

Теорема 11. *Функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет следующие свойства:*

а) областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;

б) область значений является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) является нечётной;

2) является возрастающей;

д) график арктангенса симметричен части графика тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.

Доказательство. а) и б). Проектирование из центра O тригонометрической окружности устанавливает взаимно однозначное соответствие между осью тангенсов, которая представляет множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, и дугой $M_{\frac{\pi}{2}} M_{\frac{\pi}{2}}$ три-

гонометрической окружности без концевых точек $M_{\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{\pi}{2}}$,

которая представляет числа промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 462).

А это означает, что область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, а область значений — промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

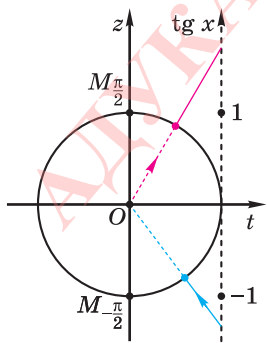


Рис. 462

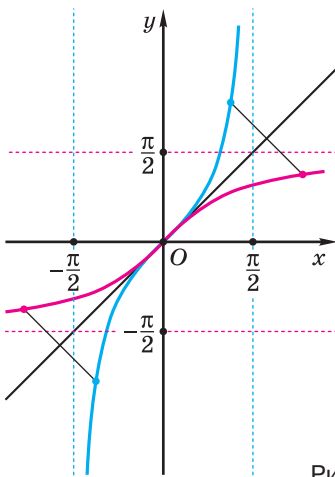


Рис. 463

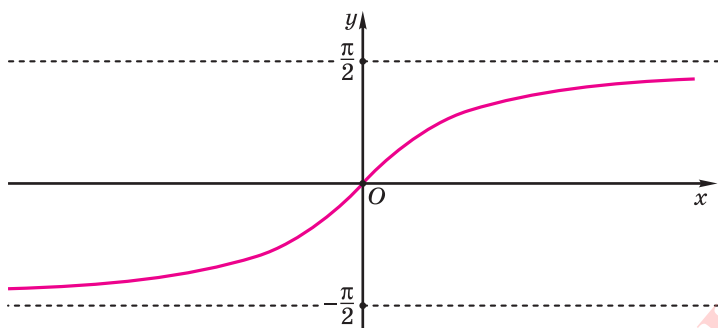


Рис. 464

в) Свойство следует из равенства $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, которое доказано в теореме 6 параграфа 13.

Свойства з) и д) обосновываются аналогично свойствам з) и д) теоремы 6. Проведите это обоснование самостоятельно. Рисунок 463 иллюстрирует свойство д).

График арктангенса представлен на рисунке 464. ◀

Функция, заданная формулой $y = \operatorname{ctg} x$, где x — аргумент, называется **котангенсом**.

▶ **Теорема 12.** *Функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет следующие свойства:*

а) *областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, из которого исключены числа вида $k\pi$, где k — любое целое число;*

б) *областью значений является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел;*

в) *является нечётной;*

г) *является периодической с наименьшим положительным периодом π ;*

д) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

е) *убывает от $+\infty$ до $-\infty$ на каждом из промежутков $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, где k — целое число.*

Доказательство. а) В область определения котангенса входят все действительные числа, за исключением тех, которые соответствуют точкам пересечения единичной окружности с осью абсцисс (рис. 465), т. е. за исключением чисел $k\pi$, где k — целое число.

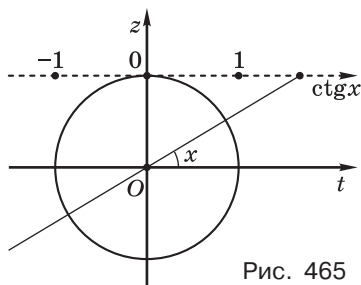


Рис. 465

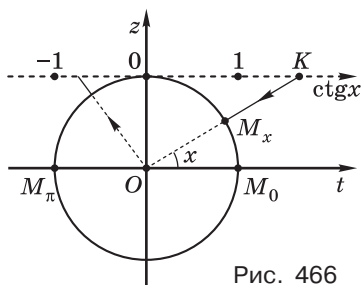


Рис. 466

б) В параграфе 13 доказано, что котангенс числа x равен координате точки K оси котангенсов (рис. 466). Понятно, что любое число оси котангенсов есть значение котангенса. Поэтому областью значений котангенса является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

в) Свойство следует из равенства $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg} x$, которое доказано в теореме 1 параграфа 11.

г) Поскольку $\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg} x$, то число π является периодом котангенса. Это наименьший положительный период, так как на промежутке $(0; \pi)$ котангенс каждое своё значение принимает только один раз (рис. 467).

д) Поскольку $\text{ctg} x = -\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$(\text{ctg} x)' = -\left(\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

е) На промежутке $(0; \pi)$ производная котангенса отрицательна, поэтому на этом промежутке котангенс убывает. Учитывая, что периодом функции $y = \text{ctg} x$ является число π , можно утверждать, что на любом из промежутков $(0 + \pi k; \pi + \pi k)$, где k — целое число, функция $y = \text{ctg} x$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Полученный результат можно усмотреть и из тех соображений, что котангенс любого действительного числа изображается некоторой точкой оси котангенсов (рис. 468). По этому рисунку видно, что если аргумент x возрастает от 0 до π , то $\text{ctg} x$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$. ◀

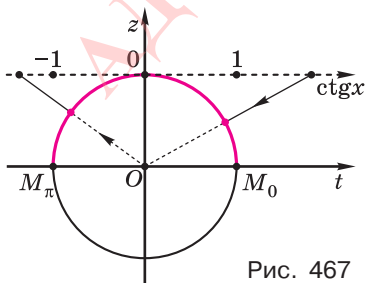


Рис. 467

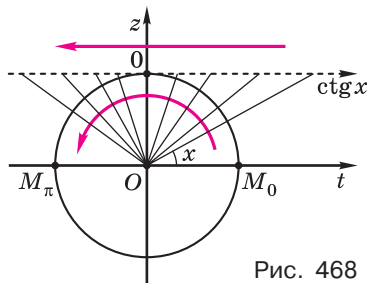


Рис. 468

Равенство $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ указывает, что график котангенса можно получить из графика тангенса сдвигом тангенсоиды по оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ и последующим отражением полученного графика относительно оси абсцисс (рис. 469).

График котангенса представлен на рисунке 470.

► Рассмотрим функцию, обратную котангенсу.

Функция, которая задаётся формулой $y = \operatorname{arccotg} x$, где x — аргумент, называется **арккотангенсом**.

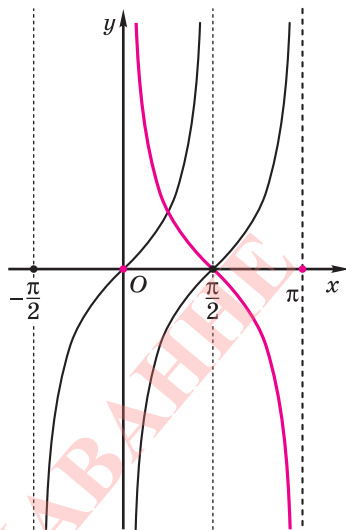


Рис. 469

Теорема 13. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ имеет следующие свойства:

- областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;
- областью значений является промежуток $(0; \pi)$;
- не является чётной и не является нечётной;
- является убывающей;
- график арккотангенса симметричен части графика котангенса на промежутке $(0; \pi)$ относительно прямой $y = x$.

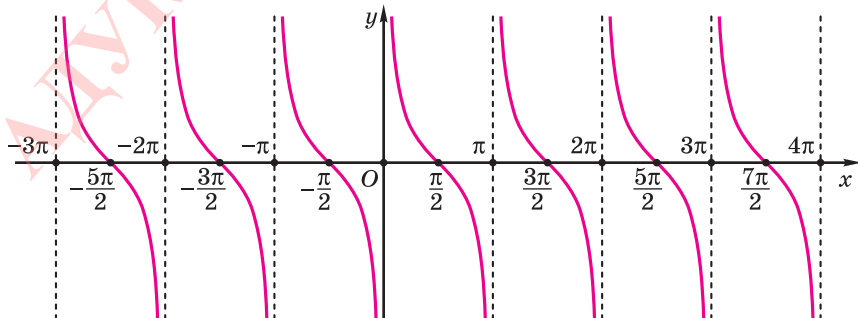


Рис. 470

Доказательство. а) и б). Проектирование из центра O тригонометрической окружности устанавливает взаимно однозначное соответствие между осью котангенсов, которая представляет множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, и дугой M_0M_π тригонометрической окружности, которая представляет числа промежутка $[0; \pi]$ (рис. 471). А это означает, что областью определения функции $y = \operatorname{arcsctg} x$ является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, а областью значений — промежуток $[0; \pi]$.

в) Свойство доказывается, как и соответствующее свойство для арккосинуса, установленное в теореме 9 параграфа 20. Проведите это доказательство самостоятельно.

Свойства **з)** и **д)** обосновываются аналогично свойствам **з)** и **д)** теоремы 6. Проведите это обоснование самостоятельно. Рисунок 472 иллюстрирует свойство **д)**.

График арккотангенса представлен на рисунке 473. ◀

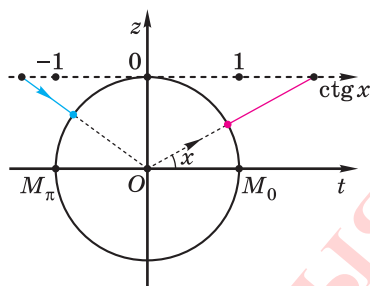


Рис. 471

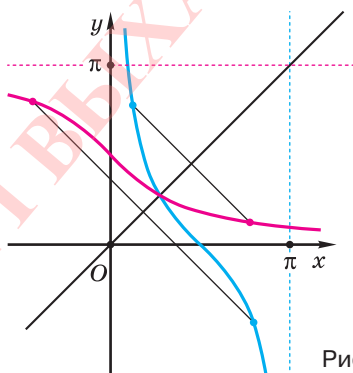


Рис. 472

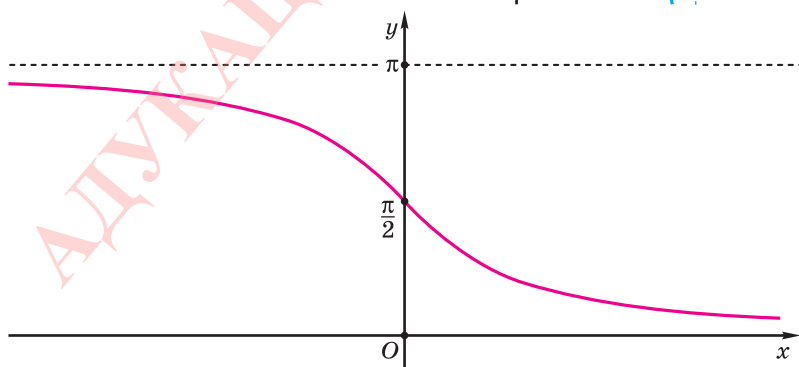


Рис. 473



1. Какое множество является областью определения тангенса?
2. Какое множество является областью значений тангенса?

3. Какое число является периодом тангенса?
4. Какой зависимостью для противоположных значений аргумента связаны значения тангенса?
5. На каких промежутках тангенс возрастает; на каких убывает?
6. Какая функция является производной тангенса?

1084. Запишите координату точки оси тангенсов, соответствующей числу:

- а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) π ; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) 2π .

1085. Запишите тангенс числа:

- а) 0; в) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{3}$;
 б) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{5\pi}{6}$.

1086. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, представленный на рисунке 474, определите, в скольких точках его пересекает график функции:

- а) $y = x$; в) $y = -2x$; д) $y = -x^5$;
 б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = x^2$; е) $y = \sqrt[5]{x}$.

1087. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 474), определите, что меньше:

- а) $\operatorname{tg} 0,5$ или $\operatorname{tg} 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ или $\operatorname{tg} 0,57$;
 б) $\operatorname{tg}(-0,2)$ или $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{tg}(-0,4)$ или $\operatorname{tg}(-1)$;
 в) $\operatorname{tg} 1,5$ или $\operatorname{tg} 0,5$; е) $\operatorname{tg}(-1)$ или $\operatorname{tg} 0,1$.

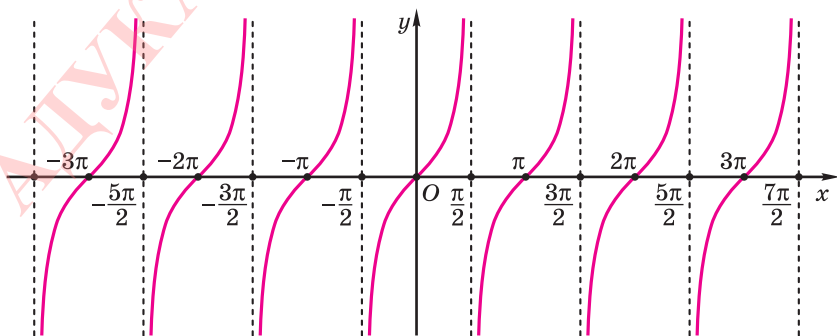


Рис. 474

1088. Определите, истинно ли равенство:

- а) $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; д) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{6}$;
б) $\operatorname{tg}(2x - 2\pi) = \operatorname{tg}(2x + 6\pi)$; е) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; ж) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{57\pi}{5}$;
г) $\operatorname{tg}(7\pi - t) = \operatorname{tg}(3\pi - t)$; з) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1089. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \operatorname{tg} x$ при значении аргумента x , равном:

- а) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{7\pi}{5}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; к) $\frac{11\pi}{3}$;
б) 3; д) $\frac{16\pi}{5}$; з) $\frac{5\pi}{4}$; л) 5;
в) 2; е) 7; и) $-\frac{3\pi}{4}$; м) $\frac{13\pi}{8}$.

1090. С помощью калькулятора или таблиц определите координату точки оси тангенсов, соответствующей числу:

- а) 0; в) 1,3; д) 0,5;
б) 1,5; г) 1,2; е) 0,3.

1091. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 474) и её свойства, укажите значение аргумента, при котором тангенс равен 1, а аргумент принадлежит промежутку:

- а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$;
б) $\left(3\pi; -\frac{7\pi}{2}\right)$; г) $\left(8\pi; \frac{17\pi}{2}\right)$.

1092. Используя графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1$, приведённые на рисунке 475, укажите три промежутка, по которым:

- а) $\operatorname{tg} x < -1$; в) $\operatorname{tg} x \leq -1$;
б) $\operatorname{tg} x > -1$; г) $\operatorname{tg} x \geq -1$.

1093. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, представленный на рисунке 474, запишите формулу, задающую все промежутки, по которым тангенс:

- а) отрицателен; в) неотрицателен;
б) положителен; г) неположителен.

1094. Докажите, что для значений переменной x , близких к нулю, истинно приближенное равенство $\operatorname{tg} x \approx x$.

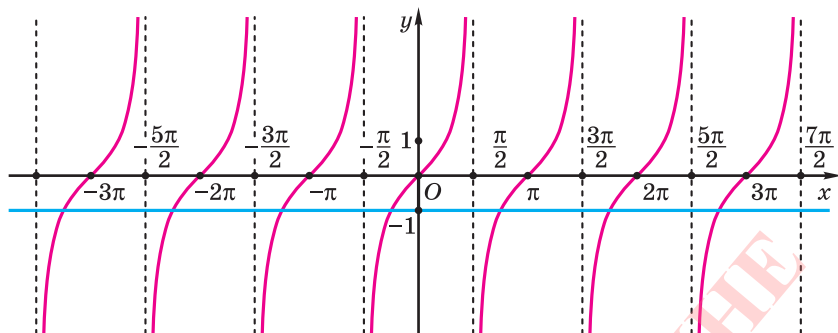


Рис. 475

1095. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$, укажите наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке:

- а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;
 б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1096. Найдите значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при значении аргумента, равном:

- а) -1 ; б) 0 ; в) 1 ; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1097. Докажите, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ является возрастающей.

1098. Докажите, что график функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1099. Запишите котангенс числа:

- а) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{3}$; ж) $\frac{2\pi}{3}$;
 б) $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{\pi}{2}$.

1100. Используя калькулятор или таблицы, определите координату точки оси котангенсов, соответствующей числу:

- а) 1 ; в) $-1,3$; д) $-0,5$;
 б) $-1,5$; г) $-1,2$; е) $-0,3$.

1101. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, представленный на рисунке 476, определите, что меньше:

- а) $\operatorname{ctg} 0,5$ или $\operatorname{ctg} 1$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ или $\operatorname{ctg} 0,57$;
 б) $\operatorname{ctg}(-0,2)$ или $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{ctg}(-0,4)$ или $\operatorname{ctg}(-1)$;
 в) $\operatorname{ctg} 1,5$ или $\operatorname{ctg} 0,5$; е) $\operatorname{ctg}(-1)$ или $\operatorname{ctg} 0,1$.

1102. Используя графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -1$, приведённые на рисунке 477, укажите три промежутка, по которым:

- а) $\operatorname{ctg} x < -1$; в) $\operatorname{ctg} x \leq -1$;
 б) $\operatorname{ctg} x > -1$; г) $\operatorname{ctg} x \geq -1$.

1103. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, представленный на рисунке 476, запишите формулу, выражающую все промежутки, по которым котангенс:

- а) отрицателен; в) неотрицателен;
 б) положителен; г) неположителен.

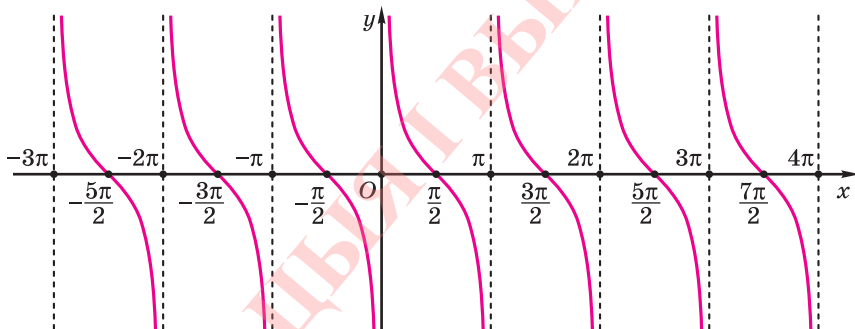


Рис. 476

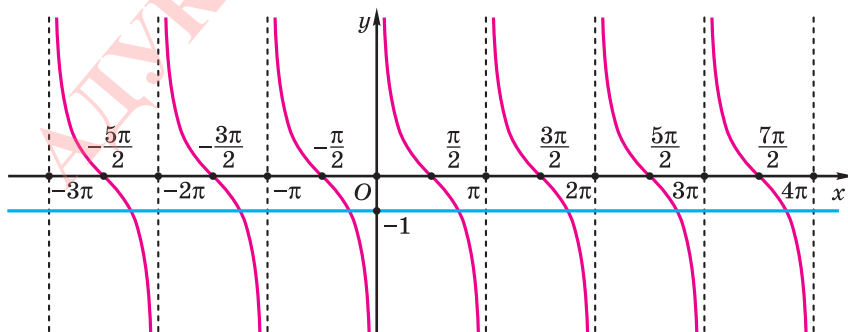


Рис. 477

1104. Определите, истинно ли равенство:

а) $\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg}(x + \pi)$;

б) $\operatorname{ctg}(2x - 2\pi) = \operatorname{ctg}(2x + 6\pi)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(7\pi - t) = \operatorname{ctg}(3\pi - t)$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 + 2\sin \frac{\pi}{4}$;

е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;

ж) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5} = \operatorname{ctg} \frac{57\pi}{5}$;

з) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1105. Определите, какой знак имеет значение функции $y = \operatorname{ctg} x$ при значении аргумента x , равном:

а) $\frac{8\pi}{9}$; в) $\frac{13\pi}{3}$; д) $\frac{632\pi}{9}$;

б) $\frac{5\pi}{23}$; г) 28; е) $-\frac{2008\pi}{3}$.

1106. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (см. рис. 477) и её свойства, на промежутке $(0; \pi)$ решите неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x < 1$; д) $\operatorname{ctg} x < -1$;

б) $\operatorname{ctg} x \leq 1$; е) $\operatorname{ctg} x \leq 1$;

в) $\operatorname{ctg} x > 1$; ж) $\operatorname{ctg} x > -1$;

г) $\operatorname{ctg} x \geq 1$; з) $\operatorname{ctg} x \geq -1$.

1107. Используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$, укажите наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке:

а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;

б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1108. Найдите значение функции $y = \operatorname{arcc tg} x$ при значении аргумента, равном:

а) -1; б) 0; в) 1; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1109. Докажите, что функция $y = \operatorname{arcc tg} x$ является убывающей.

1110. Докажите, что график функции $y = \operatorname{arcsctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ части графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$.

1111. Докажите, что истинно равенство:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \operatorname{arctg} 3 = \frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} = \operatorname{arctg} \frac{2}{11}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{4} + \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{7} = \frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

е) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

1112. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} 7 = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$;

в) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$;

г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

1113. Докажите, что истинно равенство:

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{m} + \operatorname{arctg} \frac{m-1}{m+1} = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{n}{m} + \operatorname{arctg} \frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \operatorname{arctg} 3$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \operatorname{arctg} \frac{3}{11} = \frac{\pi}{4}$.

1114. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3a$;

г) $\operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} a$;

б) $\operatorname{arctg} x = 3 \arcsin a$;

д) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$;

в) $\operatorname{arctg} x = 3 \arccos a$;

е) $\arcsin x = 4 \arcsin a$.

1115. Решите уравнение:

- а) $\arcsin x = \arccos x$; в) $\pi - \arcsin x = \arccos x$;
б) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x$; г) $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arccotg} 3x = \frac{\pi}{4}$.

1116. Точка находится на расстоянии 8 см от каждой вершины правильного треугольника со стороной 12 см. Найдите расстояние этой точки от плоскости треугольника.

1117. Есть равнобедренный треугольник, основание которого и проведённая к нему высота равны 8 см. Точка А отстоит на 12 см от плоскости треугольника и равноудалена от его вершин. Найдите расстояние точки А от вершин треугольника.

1118. Из точки, отстоящей от плоскости на 10 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, учитывая, что они перпендикулярны и образуют с плоскостью углы в 30° .

1119. Из вершины квадрата возведён перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b , причём $a < b$. Найдите перпендикуляр и сторону квадрата.

1120. Из вершины X прямоугольного треугольника XYZ с гипотенузой XY к его плоскости возведён перпендикуляр XQ . Найдите площадь треугольника YZQ , учитывая, что $YZ = 12$ см, $ZQ = 12\sqrt{3}$ см.

1121. Используя рисунок 478, докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания пирамиды и её апофемы.

1122. На отрезке MN выбрана точка C , и на отрезках-частях CN и CM как на апофемах построены правильные

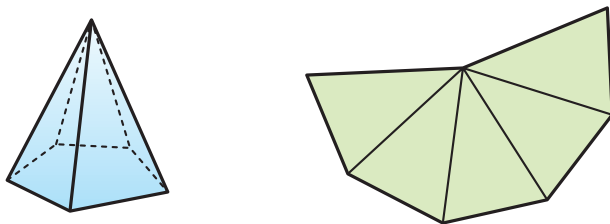


Рис. 478

пирамиды. Их боковые поверхности равны 150 см^2 и 270 см^2 , а периметр основания другой пирамиды составляет 120 % периметра основания первой пирамиды (рис. 479). Найдите апофемы пирамид, учитывая, что когда на отрезке MN как на апофеме построили третью правильную пирамиду с боковой поверхностью 420 см^2 , то периметр её основания оказался равным 28 см.

1123. Велосипедист с одной скоростью проехал 39 км, а затем снизил её на 20 % и проехал ещё 15,6 км. Найдите скорости велосипедиста, учитывая, что средняя скорость на всём пути составила 14 км/ч.

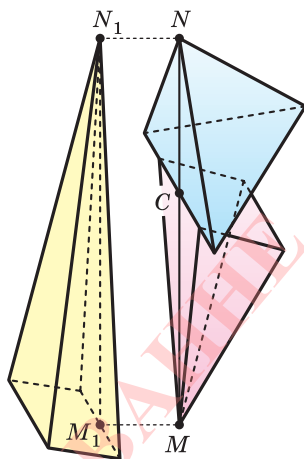


Рис. 479

1124. Решите уравнение $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

1125. Найдите область значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

1126. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить суммой двух взаимно простых чисел, больших 1.

22. Простейшие тригонометрические уравнения

Рассмотрим *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Пусть есть уравнение

$$\sin x = a.$$

Для его решения на координатную плоскость uOv наложим тригонометрическую окружность и прямую $v = a$. При этом возможны три случая: прямая $v = a$ пересекает окружность в

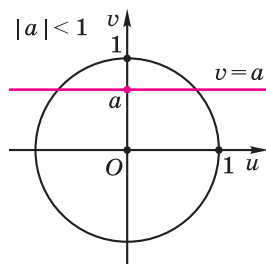


Рис. 480

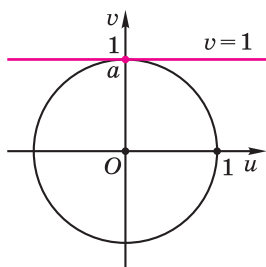


Рис. 481

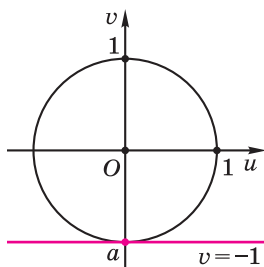


Рис. 482

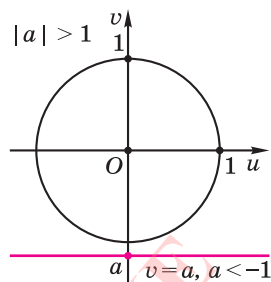


Рис. 483

двух точках, если $|a| < 1$ (рис. 480); прямая $v = a$ касается окружности, если $|a| = 1$ (рис. 481 и 482); прямая $v = a$ не имеет с окружностью общих точек, если $|a| > 1$ (рис. 483). В первом и втором случаях уравнение $\sin x = a$ имеет корни, в третьем это уравнение корней не имеет.

Пример 1. Решим уравнение $\sin x = 0$. Прямая $v = 0$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_0 и M_π (рис. 484). Точка M_0 представляет все числа вида $2k\pi$, а точка M_π — все числа вида $\pi + 2n\pi$, где k и n — целые числа. Значит,

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ или } (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь запись-формула $k \in \mathbb{Z}$ выражает утверждение « k — целое число», или равносильное ему утверждение «Число k принадлежит множеству целых чисел».

Заметим, что две записанные серии корней можно выразить одной формулой

$$x = t\pi, t \in \mathbb{Z},$$

так как при чётных значениях переменной t , т. е. если $t = 2k$, получается первая серия, а при нечётных значениях переменной t , т. е. если $t = 2n + 1$, — вторая серия.

Пример 2. Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$. Прямая $v = \frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках $M_{\frac{\pi}{6}}$ и $M_{\frac{5\pi}{6}}$ (рис. 485). Точка $M_{\frac{\pi}{6}}$

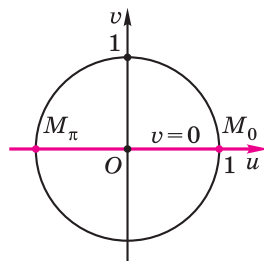


Рис. 484

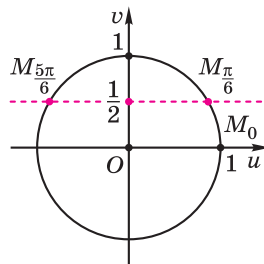


Рис. 485

соответствует всем числам вида $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, а точка $M_{\frac{5\pi}{6}}$ — всем числам вида $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, где k и n — целые числа. Значит, множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ составляют множества $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ и $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, что можно записать так:

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ответ можно записать и в виде

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

или в виде

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

поскольку при чётных значениях m эта формула даёт числа первой серии, а при нечётных — второй. Действительно, если $m = 2k$, то $x = (-1)^{2k} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, а если $m = 2n + 1$, то $x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + (2n + 1)\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 14. Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней, а если $|a| \leq 1$, то корни этого уравнения выражаются формулой

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $|a| > 1$. Тогда прямая $v = a$ не пересекает тригонометрическую окружность, и поэтому уравнение $\sin x = a$ не имеет корней.

Пусть $|a| < 1$. Тогда прямая $v = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 486).

Точка M_1 тригонометрической окружности соответствует числу $\arcsin a$

из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \arcsin a + 2m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

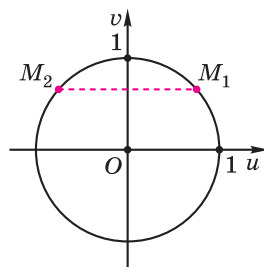


Рис. 486

Точка M_2 соответствует числу $\pi - \arcsin a$ из промежутка $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Формулы $x = \arcsin a + 2m\pi$ и $x = \pi - \arcsin a + 2n\pi$, где m и n — целые числа, можно объединить в одну формулу:

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

поскольку при чётных значениях переменной k , т. е. если $k = 2m$, получается первая формула, а при нечётных значениях k , т. е. если $k = 2n + 1$, — вторая формула.

Если $a = 1$, то выражения $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$ оба становятся выражением $\frac{\pi}{2}$, что соответствует касанию прямой $v = a$ к тригонометрической окружности в точке B (рис. 487). В этом случае все три формулы (1), (2) и (3) дают одно и то же множество чисел $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Если $a = -1$ (рис. 488), то формулы (1), (2) и (3) также определяют одно и то же множество чисел $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пусть есть уравнение

$$\cos x = a.$$

Для его решения на координатной плоскости uOv рассмотрим тригонометрическую окружность и прямую $u = a$. При этом реализуется один из трёх случаев: прямая $u = a$ пересекает окружность в двух точках, если $|a| < 1$ (рис. 489); прямая $u = a$ касается окружности, если $|a| = 1$ (рис. 490 и

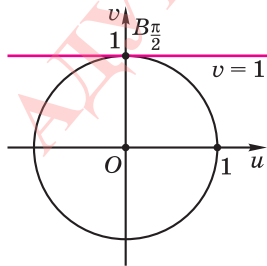


Рис. 487

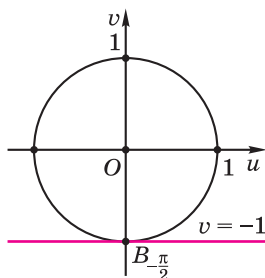


Рис. 488

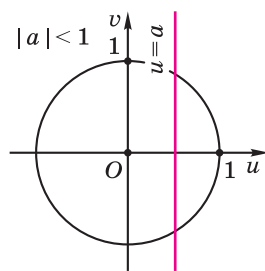


Рис. 489

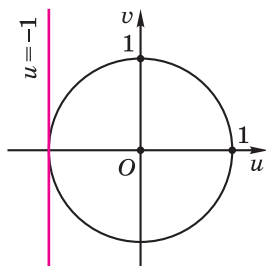


Рис. 490

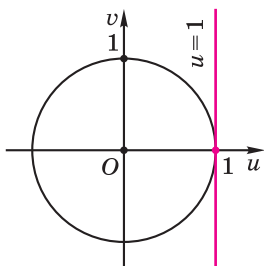


Рис. 491

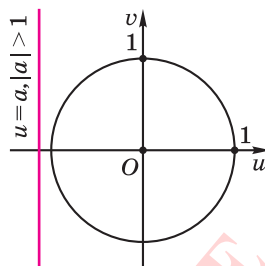


Рис. 492

491); прямая $u = a$ не имеет с окружностью общих точек, если $|a| > 1$ (рис. 492). В третьем случае уравнение $\cos x = a$ корней не имеет, в первом и втором случаях это уравнение имеет корни.

Пример 3. Решим уравнение $\cos x = 0$.

Есть две точки тригонометрической окружности, которые имеют абсциссу, равную 0, — точки $M_{\frac{\pi}{2}}$ и $M_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 493).

Точка $M_{\frac{\pi}{2}}$ соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, а точка $M_{\frac{3\pi}{2}}$ — числам вида $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, где n и m — целые числа. Эти две серии корней можно выразить одной формулой

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Полученная формула и задаёт множество корней уравнения $\cos x = 0$.

Пример 4. Решим уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$. Прямая $u = -\frac{1}{2}$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках $M_{\frac{2\pi}{3}}$ и $M_{\frac{4\pi}{3}}$ (рис. 494). Точка $M_{\frac{2\pi}{3}}$ представляет все числа

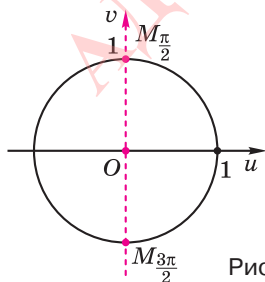


Рис. 493

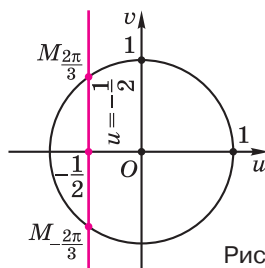


Рис. 494

вида $\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, а точка $M_{\frac{2\pi}{3}}$ — все числа вида $-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, где m и n — целые числа. Эти числа вместе составляют множество корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Ответ можно записать и так:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 15. Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней, а если $|a| \leq 1$, то множество корней этого уравнения выражается формулой

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $|a| > 1$. Тогда прямая $u = a$ не пересекает тригонометрическую окружность, и поэтому уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

Пусть $|a| < 1$. Тогда прямая $u = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 495).

Точка M_1 тригонометрической окружности соответствует числу $\arccos a$ из промежутка $[0; \pi]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \arccos a + 2m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Точка M_2 соответствует числу $-\arccos a$ из промежутка $[-\pi; 0]$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = -\arccos a + 2n\pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Две полученные серии корней можно объединить одной формулой

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Если $a = 1$, то выражения $\arccos a$ и $-\arccos a$ оба становятся числом 0, что соответствует касанию прямой $x = a$ и тригонометрической окружности в точке A (рис. 496).

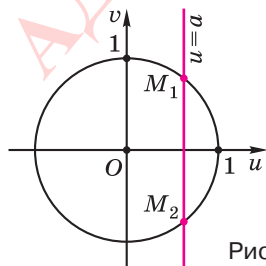


Рис. 495

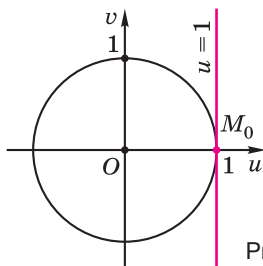


Рис. 496

В этом случае все три формулы (4), (5) и (6) дают одно и то же множество чисел $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Если $a = -1$ (рис. 497), то формулы (4), (5) и (6) также выражают одно и то же множество чисел $\{(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Пусть есть уравнение

$$\operatorname{tg} x = a.$$

Теорема 16. *Множество корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ выражается формулой*

$$x = \operatorname{arctg} a + m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть a — некоторое действительное число. Отметим его на оси тангенсов. Прямая, проходящая через эту точку и начало координат, пересекает тригонометрическую окружность в двух точках M_1 и M_2 (рис. 498).

Точка M_1 соответствует числу $\operatorname{arctg} a$ из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + 2m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}.$$

Точка M_2 соответствует числу $\pi + \operatorname{arctg} a$ из промежутка $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, а значит, и всем числам, которые выражаются формулой

$$x = \pi + \operatorname{arctg} a + 2n\pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Две полученные серии корней можно объединить одной формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Решим уравнение $\operatorname{tg} y = 3$.

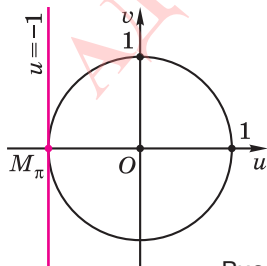


Рис. 497

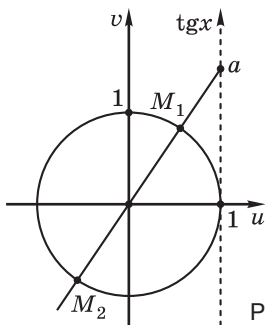


Рис. 498

В соответствии с теоремой 16 получим

$$y = \operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

► **Теорема 17.** Множество корней уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ выражается формулой

$$x = \operatorname{arccotg} a + m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство теоремы 17 проводится аналогично доказательству теоремы 16. Проведите его самостоятельно, используя рисунок 499.

Пример 6. Решим уравнение $\operatorname{ctg} y = 2$.

В соответствии с теоремой 17 получим

$$y = \operatorname{arccotg} 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$$

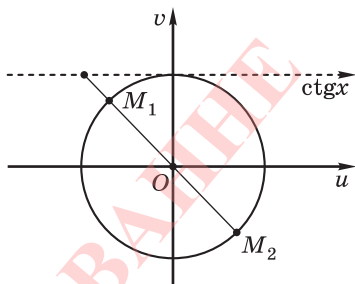


Рис. 499



1. Какое число называется арксинусом числа a ?
2. Укажите множество корней уравнения $\sin x = a$, если $a > 1$; $a \leq 1$.
3. Какое число называется арккосинусом числа a ?
4. Укажите множество корней уравнения $\cos x = a$, если $a > 1$; $a \leq 1$.
5. Какое число называется арктангенсом числа a ?
6. Укажите множество корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

1127. Решите уравнение:

- | | |
|------------------------------------|---|
| а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | д) $\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0$; |
| б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; | е) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; |
| в) $\sin 2x = 0$; | ж) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0,5$; |
| г) $\sin \frac{x}{3} = -1$; | з) $2 \sin 2x - 1 = 0$. |

1128. Решите уравнение:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | д) $3 \cos 5x - 3 = 0$; |
| б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | е) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; |
| в) $\cos 3x = \frac{1}{2}$; | ж) $2 \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$; |
| г) $\cos 2x = -1$; | з) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$. |

1129. Решите уравнение:

- а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$;
б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; е) $3 \operatorname{tg}(x + 1) + \sqrt{3} = 0$;
в) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$;
г) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$; з) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

1130. Решите уравнение:

- а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;
б) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\operatorname{ctg} 4x = 5$; ж) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$;
г) $\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{3} = 0$; з) $3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 5 = 0$.

1131. Найдите сумму корней уравнения на промежутке $[-\pi; 2\pi]$:

- а) $\sin t = -1$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$; д) $\cos 2t = 0$;
б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin 2t = 0$; е) $\cos 2t = -1$.

1132. Найдите сумму корней уравнения на промежутке $[-2\pi; \pi]$:

- а) $\sin 2t = 1$; в) $\sin^2 t = \frac{3}{4}$; д) $\operatorname{tg} t = 1$;
б) $\sin t \cos t = 0$; г) $\cos^2 t = \frac{1}{2}$; е) $\operatorname{tg} 2t = 1$.

1133. Найдите сумму корней уравнения на указанном промежутке:

- а) $\sin^2 t = \frac{1}{4}$, $[0; 2\pi]$; в) $\operatorname{tg}^2 t = 1$, $[-2\pi; \pi]$;
б) $\cos x = 1$, $[-\pi; 3\pi]$; г) $\operatorname{ctg}^2 t = 3$, $[0; 2\pi]$.

1134. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды $DFGH$ равна 12 см. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания, учитывая, что ребро основания равно 8 см.

1135. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC с катетом и прилежащим к нему углом, соответственно равными a и α , возведён перпендикуляр CD длиной l . Найдите площадь треугольника DAB .

1136. Основание XY и боковая сторона YZ равнобедренного треугольника XYZ соответственно равны 6 см и 5 см. Из центра Q окружности, вписанной в треугольник, возведён перпендикуляр QG . Найдите высоту треугольника XGY , проведённую из вершины G , учитывая, что $QG = 2$ см.

1137. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости возведён перпендикуляр CD . Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, учитывая, что $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$.

1138. Используя рисунок 500, докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на образующую.

1139. Есть три цилиндра. У одного окружность основания равна 21π см, у другого боковая поверхность равна 435π см², а образующая на 10 см короче, у третьего боковая поверхность равна сумме боковых поверхностей первого и второго цилиндров, длина окружности основания — сумме длин их окружностей, а образующая равна 19,2 см. Найдите образующую первого и второго цилиндров.

* * *

1140. Учитывая, что α — больший единицы корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, упростите выражение

$$\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}.$$

1141. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ образует со сторонами CB и CD углы в 30° и 45° , а диагональ BD отделяет равносторонний треугольник BCD . Найдите углы ABC и ADC .

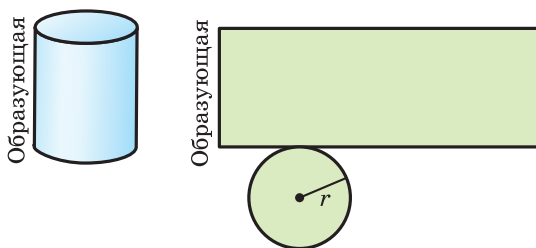


Рис. 500

1142. Какое наименьшее количество уголков из трёх клеток нужно вырезать из шахматной доски, чтобы после этого уже нельзя было вырезать ни одного такого уголка?

23. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, которое содержит переменные под знаком синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений, рассмотренных в предыдущем параграфе. При этом приходится выполнять преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Решим уравнение

$$10 \cos^2 x - 2 \sin x - 8 = 0.$$

Заменив выражение $\cos^2 x$ равным ему выражением $1 - \sin^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\sin x$:

$$\begin{aligned} 10 \cos^2 x - 2 \sin x - 8 &= 0 \equiv \\ &\equiv 10(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x - 8 = 0 \equiv \\ &\equiv 10 - 10 \sin^2 x - 2 \sin x - 8 = 0 \equiv \\ &\equiv 10 \sin^2 x + 2 \sin x - 8 = 0 \equiv 5 \sin^2 x + \sin x - 4 = 0 \equiv \\ &\equiv \sin x = -1, \text{ или } \sin x = \frac{4}{5} \equiv x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ &\text{или } x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} z + 7 \operatorname{ctg} z + 8 = 0.$$

Заменив выражение $\operatorname{ctg} z$ равным ему выражением $\frac{1}{\operatorname{tg} z}$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} z$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z + 7 \operatorname{ctg} z + 8 &= 0 \equiv \operatorname{tg} z + \frac{7}{\operatorname{tg} z} + 8 = 0 \equiv \\ &\equiv \operatorname{tg}^2 z + 8 \operatorname{tg} z + 7 = 0 \equiv \operatorname{tg} z = -1, \text{ или } \operatorname{tg} z = -7 \equiv \\ &\equiv z = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\arctg 7 + m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что второй переход в преобразованиях уравнения, который заключался в умножении левой и правой частей уравнения на $\operatorname{tg} z$, является преоб-

разованием равносильности в области определения уравнения, которая определяется условием $\sin x \cos x \neq 0$. Все найденные корни удовлетворяют этому условию.

Ответ. $z = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; x = -\operatorname{arctg} 7 + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

При решении тригонометрических уравнений может оказаться полезным использование приёма *разложения на множители*.

Пример 3. Решим уравнение $2 \sin t \sin 2t = \cos t$.

Используя тождество $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, получим уравнение

$$2 \sin t \cdot 2 \sin t \cos t - \cos t = 0,$$

которое после вынесения за скобки множителя $\cos t$ приводится к уравнению

$$\cos t (4 \sin^2 t - 1) = 0.$$

Дальнейшее решение уравнения следующее:

$$\cos t (4 \sin^2 t - 1) = 0 \equiv \cos t = 0, \text{ или } 4 \sin^2 t - 1 = 0 \equiv$$

$$\equiv \cos t = 0, \text{ или } \sin t = -\frac{1}{2}, \text{ или } \sin t = \frac{1}{2} \equiv$$

$$\equiv t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } t = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } t = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

У нас получилось 3 серии корней. Иной раз некоторые из серий можно объединить в одну серию. Представим полученные серии корней на тригонометрической окружности. Первая серия изображается точками A и B , вторая — точками C и D , третья — точками E и F (рис. 501). Обратим внимание на то, что при движении по окружности, например, в положительном направлении, каждая из этих точек получается из предыдущей сдвигом на $\frac{\pi}{3}$. Это позволяет все полученные серии выразить одной формулой $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z}$.

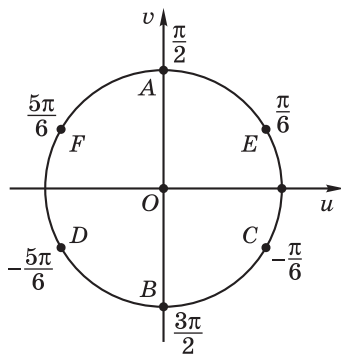


Рис. 501

Пример 4. Решим уравнение

$$\sin^2 u + 2 \sin u \cos u - 3 \cos^2 u = 0.$$

Обратим внимание на то, что если считать $\sin u$ и $\cos u$ членами первой степени, то каждое слагаемое алгебраической суммы в левой части уравнения имеет одну и ту же — вторую — степень. Его можно решать делением на наибольшую степень синуса или косинуса. При этом мы не нарушаем равносильность преобразований, так как те значения переменной, при которых синус или косинус равны нулю, не являются корнями уравнения. Действительно, если допустить, что $\cos u = 0$, то тогда и $\sin u = 0$, но синус и косинус вместе не могут обращаться в нуль. Учитывая это, разделим обе части уравнения на $\cos^2 u$ и решим полученное уравнение, равносильное данному:

$$\begin{aligned} \sin^2 u + 2 \sin u \cos u - 3 \cos^2 u &= 0 \equiv \\ \equiv \operatorname{tg}^2 u + 2 \operatorname{tg} u - 3 &= 0 \equiv \operatorname{tg} u = -3, \text{ или } \operatorname{tg} u = 1 \equiv \\ \equiv u = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } u &= \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ. $u = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ или $u = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решим уравнение

$$3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 = 0.$$

Это уравнение заменой слагаемого 7 тождественно равной ему суммой $7(\sin^2 y + \cos^2 y)$ сводится к уравнению $3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 \sin^2 y - 7 \cos^2 y = 0$, у которого все слагаемые имеют вторую степень. Его дальнейшее решение следующее:

$$\begin{aligned} 3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 \sin^2 y - 7 \cos^2 y &= 0 \equiv \\ \equiv 7 \cos^2 y + 11 \sin y \cos y + 4 \sin^2 y &= \\ \equiv 7 \operatorname{ctg}^2 y + 11 \operatorname{ctg} y + 4 &= 0 \equiv \\ \equiv \operatorname{ctg} y = -1, \text{ или } \operatorname{ctg} y = -\frac{4}{7} \equiv y &= \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{или } y = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{7}\right) + l\pi, l \in \mathbb{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } y = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + l\pi, l \in \mathbb{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } y = -\operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + (l+1)\pi, l \in \mathbb{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } y = -\operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ. $y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ или $y = -\operatorname{arccotg} \frac{4}{7} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решим уравнение

$$2 \sin \frac{x}{3} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 1 - 2 \sin \frac{x}{3}.$$

Разложим данное уравнение на множители и решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(2 \sin \frac{x}{3} \operatorname{tg} x + 2 \sin \frac{x}{3} \right) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv \\ & \equiv 2 \sin \frac{x}{3} (\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv \\ & \equiv (\operatorname{tg} x + 1) \left(2 \sin \frac{x}{3} - 1 \right) = 0 \equiv \operatorname{tg} x = -1, \text{ или } \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \equiv \\ & \equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } \frac{x}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \equiv \\ & \equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Учтём область определения уравнения, которая определяется условием $\cos x \neq 0$. Легко заметить, что числа серии $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3n\pi, n \in \mathbb{Z}$ этому условию не удовлетворяют и, значит, не могут входить в ответ.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Решим уравнение $7 \sin b + \cos b = 5$.

Используем формулу вспомогательного угла, для чего разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{7^2 + 1^2}$, т. е. на $\sqrt{50}$:

$$\frac{7}{\sqrt{50}} \sin b + \frac{1}{\sqrt{50}} \cos b = \frac{5}{\sqrt{50}}.$$

Поскольку $\left(\frac{7}{\sqrt{50}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)^2 = 1$, то существует такое число u , что $\frac{7}{\sqrt{50}} = \sin u$ и $\frac{1}{\sqrt{50}} = \cos u$. Это позволяет уравнение представить так:

$$\sin u \sin b + \cos u \cos b = \frac{5}{5\sqrt{2}}, \text{ или } \cos(b - u) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $b - u = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, или $b = \pm \frac{\pi}{4} + u + 2k\pi$. Поскольку $u = \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}$, то

$$b = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $b = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Решим это уравнение иначе, используя *универсальную подстановку*, позволяющую выразить $\sin b$ и $\cos b$ через $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$:

$$\sin b = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}; \quad \cos b = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}.$$

С учётом этого уравнение приводится к виду:

$$\frac{14 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} = 5.$$

Его решение может быть таким:

$$\begin{aligned} 14 \operatorname{tg} \frac{b}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} - 5 - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} &= 0 \equiv \\ \equiv 6 \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} - 14 \operatorname{tg} \frac{b}{2} + 4 &= 0 \equiv \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{1}{3}, \text{ или } \operatorname{tg} \frac{b}{2} = 2 \equiv \\ \equiv \frac{b}{2} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ или } \frac{b}{2} = \operatorname{arctg} 2 + n\pi, n \in \mathbb{Z} \equiv \\ \equiv b &= 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, \text{ или } b = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Учитывая условия, при которых применима универсальная подстановка, остаётся проверить, удовлетворяют ли уравнению числа вида $\pi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$:

$$7 \sin(\pi + 2l\pi) + \cos(\pi + 2l\pi) = 7 \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 \neq 5.$$

Ответ. $b = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}; b = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$

При решении тригонометрических уравнений могут использоваться *свойства тригонометрических функций*.

Пример 8. Решим уравнение

$$\sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s - \cos^4 s.$$

Преобразуем тождественно правую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s - \cos^4 s \equiv \\ \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s (1 - \cos^2 s) \equiv \\ \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s \sin^2 s. \end{aligned}$$

Теперь обратим внимание на то, что значения левой части $\sin^2 s \sin 3s - 1$ уравнения принадлежат промежутку $[-2; 0]$,

а правой части $\cos^2 s \sin^2 s$ — промежутку $[0; 1]$. Отсюда понятно, что равенство может достигаться только при условии, что левая и правая части уравнения обе равны нулю, т. е. данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 s \sin 3s - 1 = 0, \\ \cos^2 s \sin^2 s = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы требует, чтобы хотя бы один из множителей $\cos s$ или $\sin s$ был равен нулю. Таким множителем может быть только $\cos s$, так как если $\sin s = 0$, то первое уравнение не выполняется ни при каком значении переменной s . Первое уравнение системы может быть истинно только при условии, что оба множителя $\sin^2 s$ и $\sin 3s$ равны единице. Таким образом, исходное уравнение равнозначно системе

$$\begin{cases} \cos s = 0, \\ \sin^2 s = 1, \\ \sin 3s = 1. \end{cases}$$

Можно заметить, что второе уравнение полученной системы следует из первого уравнения, поэтому его можно опустить:

стать: $\begin{cases} \cos s = 0, \\ \sin 3s = 1. \end{cases}$ Корнями первого уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{2} + l\pi$, где $l \in \mathbb{Z}$. Эти числа должны удовлетворять и последнему уравнению, т. е. должно выполняться уравнение $\sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1$. Решим его:

$$\sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1 \equiv \frac{3\pi}{2} + 3l\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \equiv$$

$$\equiv 1 + 3l = 2m, m \in \mathbb{Z} \equiv m = \frac{1+3l}{2}, m \in \mathbb{Z} \equiv l = 2k + 1.$$

$$\text{Значит, } s = \frac{\pi}{2} + l\pi = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ. } s = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$



1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. При каких значениях аргумента определена функция $y = \sin x$; $y = \cos x$, $y = \tg x$; $y = \ctg x$?
3. При каком условии истинно равенство $AB = 0$?

4. Как решают тригонометрические уравнения, слагаемые обеих частей которых имеют одну и ту же степень?

5. В чём заключается универсальная подстановка и при каком условии она применима?

1143. Решите уравнение:

а) $\frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0$; в) $\frac{5}{3 \sin t + 4} = 2$; д) $\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg} z} = 0$;
б) $\frac{\cos y}{1 + \sin y} = 0$; г) $\frac{3}{5 \operatorname{tg} x + 8} = 1$; е) $\frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = 0$.

1144. Решите уравнение:

а) $\sin t \cos t = 0,25$; г) $\sin^4 \frac{y}{2} - \cos^4 \frac{y}{2} = 0,25$;
б) $\sin n \cos n = -0,25$; д) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$;
в) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0,5$; е) $\cos^2 y = \frac{1}{2}$.

1145. Решите уравнение:

а) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$; д) $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
б) $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; е) $\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$; ж) $\operatorname{tg} y = 3 \operatorname{ctg} y$;
г) $8 \cos^2 x - 12 \sin x + 7 = 0$; з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

1146. Решите уравнение:

а) $2 \cos^2 z - \sin z + 1 = 0$; е) $2 \sin^2 y + 3 \cos y = 0$;
б) $3 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$; ж) $5 \sin^2 y + 6 \cos y - 6 = 0$;
в) $4 \sin^2 y - \cos y - 1 = 0$; з) $\cos^2 x + 3 \sin x = 3$;
г) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$; и) $\cos 4x - \sin 2x = 1$;
д) $2 \cos^2 y + \sin y + 1 = 0$; к) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

1147. Решите уравнение:

а) $\cos y = \sin y$; д) $\sin z = 2 \cos z$;
б) $\sin y + \sqrt{3} \cos y = 0$; е) $2 \sin t + \cos t = 0$;
в) $3 \sin k - \sqrt{3} \cos k = 0$; ж) $2 \sin 2x = 3 \cos 2x$;
г) $3 \sin m + 5 \cos m = 0$; з) $2 \cos l - \sqrt{2} \sin l = 0$.

1148. Решите уравнение:

а) $\sin^2 k - 4 \sin k \cos k + 3 \cos^2 k = 0$;
б) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$;
в) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
г) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$;
д) $7 \sin^2 t - 5 \sin t \cos t - 2 \cos^2 t = 0$;

- е) $2 \sin^2 y = \sqrt{6} \sin 2y - 3 \cos^2 y$;
 ж) $\sqrt{3} \sin^2 l = 4 \sin l \cos l - \sqrt{3} \cos^2 l$;
 з) $\sin^2 n + \sqrt{3} \cos^2 n = (1 + \sqrt{3}) \sin n \cos n$.

1149. Решите уравнение:

- а) $3 \sin x \cos x - 2 \cos 2x = 0$;
 б) $\cos^2 y + 4 \sin^2 y = 2 \sin 2y$;
 в) $\sin 2y + \sin y \cos y = 2 \cos 2y$;
 г) $2 \cos^2 2t + 3 \sin 4t + 4 \sin^2 2t = 0$.

1150. Решите уравнение:

- а) $\cos^2 l - 3 \sin l \cos l + 1 = 0$;
 б) $3 \sin^2 y + 2 \sin y \cos y = 2$;
 в) $9 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2$;
 г) $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$.

1151. Решите уравнение:

- а) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \left(2 \sin \frac{x}{12} + 1 \right) = 0$;
 б) $\left(1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} \right) \left(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x \right) = 0$;
 в) $\left(2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) (2 \operatorname{tg} x + 1) = 0$;
 г) $\left(1 + \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) (\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

1152. Решите уравнение:

- а) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$;
 б) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$;
 в) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$;
 г) $2 \sin m - \cos m \sin m = 0$;
 д) $\sqrt{3} \cos n + \cos n \sin n = 0$;
 е) $\sqrt{3} \sin k \cos k = \cos^2 k$;
 ж) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$;
 з) $2 \sin x \cos x = \cos x$;
 и) $2 \sin^2 y = \sqrt{3} \sin 2y$;
 к) $\sin 2y = 2 \sin y$;
 л) $\operatorname{tg} 5y = \operatorname{tg} 3y$;
 м) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

1153. Решите уравнение:

- а) $\cos x = \cos 3x$;
 б) $\sin z = \sin 3z$;
 в) $\sin y + \sin 3y = 0$;
 г) $\sin 3x = \sin 5x$;
 д) $\cos 5t - \cos 3t = 0$;
 е) $\sin t + \cos 3t = 0$;
 ж) $\sin 2z = \cos 3z$;
 з) $\sin 2y - \cos y = 0$;
 и) $\sin 5t - \sin t = 0$;
 к) $\sin 5y = \sin 7y$.

1154. Решите уравнение:

- а) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;
- б) $\sin 7y - \sin y = \cos 4y$;
- в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
- г) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;
- д) $\sin y + \sin 2y + \sin 3y + \sin 4y = 0$;
- е) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

1155. Решите уравнение:

- а) $\sin 3a = \sin 2a \cos a$;
- б) $\cos 7z \cos 3z = \cos 4z$;
- в) $\cos 5a \cos a = \cos 4a$;
- г) $\cos 3z \cos z = \cos 7z \cos 5z$.

1156. Решите уравнение:

- а) $2 \sin t - 5 \cos t + 2 \operatorname{tg} t = 5$;
- б) $\sin z - \cos z + \operatorname{tg} z = 1$;
- в) $\operatorname{tg} z + \sin z \operatorname{tg} z = 0$;
- г) $\cos t + \operatorname{tg} t = 0$;
- д) $\operatorname{tg} 4z = \operatorname{tg} 2z$;
- е) $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x = 1$.

1157. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$;
- б) $\sin y + \cos y = 1$;
- в) $\sin x - \cos x = 1$;
- г) $\sin y - \sqrt{3} \cos y = 1$;
- д) $\sin 3t + \cos 3t = \sqrt{2}$;
- е) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = \sqrt{2}$;
- ж) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = 2$;
- з) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

1158. Решите уравнение:

- а) $\sin 5t + \sqrt{3} \cos 5t = 2 \sin 7t$;
- б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$;
- в) $\cos 3y - \sin y = \cos y - \sin 3y$;
- г) $5(\sin t + \cos t)^2 - 13(\sin t + \cos t) + 8 = 0$.

1159. Решите уравнение:

- а) $2 \sin 2z - 3(\sin z + \cos z) + 2 = 0$;
- б) $\sin x + \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$.

1160. Решите уравнение:

- а) $\cos 2z + \operatorname{tg} z = 1$;
- б) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$;
- в) $2 \sin u - 5 \cos u = 4$;
- г) $5 \sin x + \cos x = 5$;
- д) $\sqrt{3} \sin y - \sqrt{5} \cos y = \sqrt{3}$;
- е) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$;
- ж) $\sin y - \sqrt{7} \cos y = \sqrt{7}$;
- з) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = 1$.

1161. Решите уравнение:

- а) $\sin d + \cos d = 3$;
- б) $\sin a + \cos 2a = 2$;
- в) $\sin 3x + \cos 4x = 2$;
- г) $\sin 4z + |\sin 5z| = 2$;
- д) $2 \sin e - 3 \cos e = 6$;
- е) $\sin 3y - \cos 2y = 2$;
- ж) $\sin \frac{a}{3} - \sin \frac{a}{4} = -2$;
- з) $\sin z - \cos 2z + \sin 4z = 3$.

1162. Решите уравнение:

- а) $\sin x \sin 5x = 1$; д) $\sin 6u \sin 8u = 1$;
б) $\sin x \cos 4x = -1$; е) $\cos 4x \cos 5x = 1$;
в) $\cos x \sin 5x = -1$; ж) $\cos 8w \cos 3w = -1$;
г) $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{5} = 1$; з) $\sin^3 5t + \sin^4 7t = 2$.

1163. Докажите, что уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 100x = 100$ не имеет корней.

1164. Решите уравнение:

- а) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; в) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$; д) $\frac{\sin 4c}{\cos 6c} = 1$;
б) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; г) $\frac{\sin 3a}{\cos 5a} = 0$; е) $\frac{\cos 3d}{\sin 2d} = 1$.

1165. В основании треугольной пирамиды $KLMN$ лежит равнобедренный треугольник LMN с основанием MN , а её боковое ребро KL перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь грани KMN , учитывая, что $LM = 10$ см, $MN = 12$ см, $LK = 15$ см.

1166. В треугольной пирамиде $IJKL$ боковое ребро KI перпендикулярно плоскости JKL . Найдите высоту IH грани IJL , учитывая, что $JK = 10$ см, $KL = 17$ см, $JL = 21$ см, $IK = 15$ см.

1167. Точка отстоит от плоскости треугольника на 2,2 м, а от каждой из его сторон — на 12,2 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1168. Боковые рёбра треугольной пирамиды все равны a и образуют с основанием пирамиды углы в 30° . Найдите сторону основания, которое является правильным треугольником.

1169. Есть ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом A , равным 60° . К его плоскости из вершины B возведён перпендикуляр BP . Найдите синус угла между прямой PD и плоскостью PBC , учитывая, что эта прямая с плоскостью ромба образует угол, равный 45° .

1170. Есть прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $D_1 B = d$, $AC = m$, $AB = l$. Найдите расстояние между:

- а) прямой $A_1 C_1$ и плоскостью ABC ;
б) плоскостями ABB_1 и DCC_1 ;
в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1 .

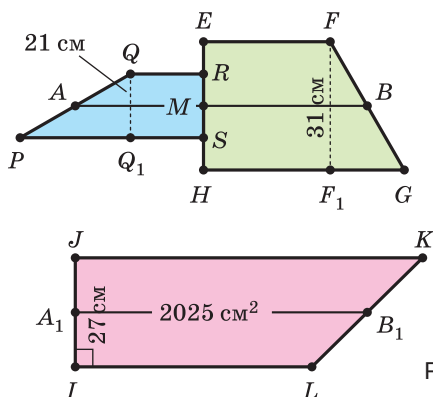


Рис. 502

1171. На отрезке AB взята точка M , и на отрезках-частях MA и MB как на средних линиях построили прямоугольные трапеции $PQRS$ и $EFGH$ с высотами QQ_1 и FF_1 , соответственно равными 21 см и 31 см, и суммарной площадью 2025 см^2 (рис. 502). Такую площадь имела бы трапеция $IJKL$ со средней линией A_1B_1 , равной AB , и высотой 27 см. Найдите:

а) средние линии трапеций $PQRS$ и $EFGH$;

б) боковые стороны трапеций $PQRS$ и $EFGH$, учитывая, что углы P и G соответственно равны 30° и 60° .

1172. Сплавляли кусок меди плотностью $8,96 \text{ г/см}^3$ и кусок цинка плотностью $7,13 \text{ г/см}^3$ и получили 100 кг латуны плотностью $8,20 \text{ г/см}^3$. Найдите с точностью до килограмма массы взятых кусков.

1173. На рисунках 504—515 представлены графики функций, полученные различными преобразованиями графика функции $y = f(x)$, изображённого на рисунке 503. Укажите номер рисунка, на котором приведён график функции:

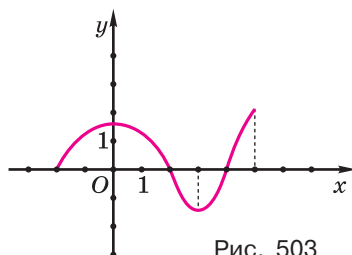


Рис. 503

- | | | |
|---------------------|-------------------|---------------------------------------|
| а) $y = f(x + 2)$; | д) $y = -f(x)$; | и) $y = 2f(x)$; |
| б) $y = f(x - 2)$; | е) $y = f(-x)$; | к) $y = \frac{1}{2}f(x)$; |
| в) $y = f(x) + 2$; | ж) $y = f(x) $; | л) $y = f(2x)$; |
| г) $y = f(x) - 2$; | з) $y = f(x)$; | м) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$. |

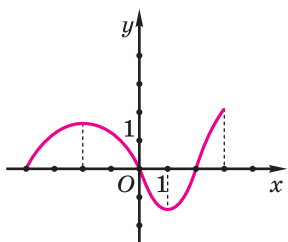


Рис. 504

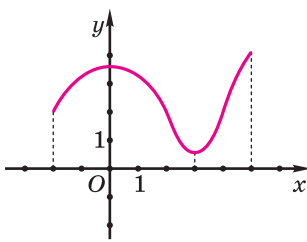


Рис. 505

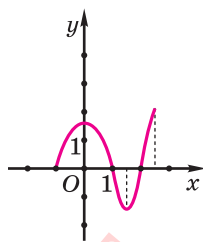


Рис. 506

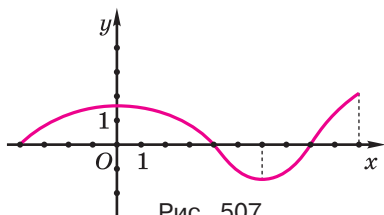


Рис. 507

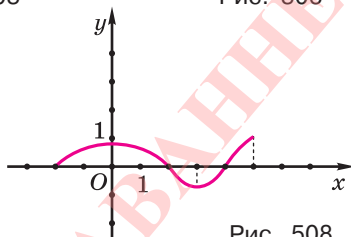


Рис. 508

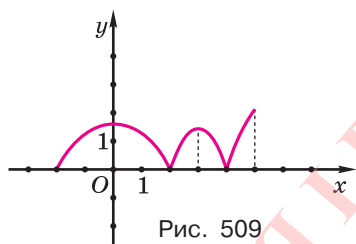


Рис. 509

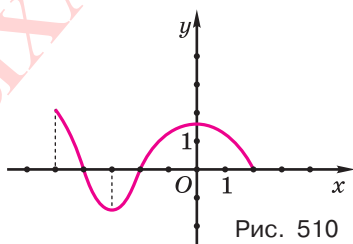


Рис. 510

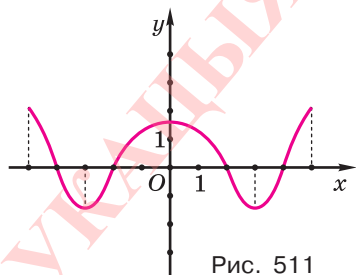


Рис. 511

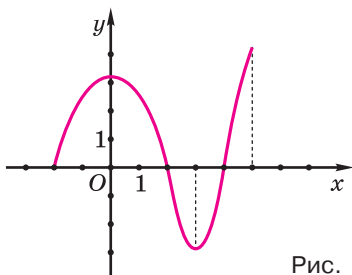


Рис. 512

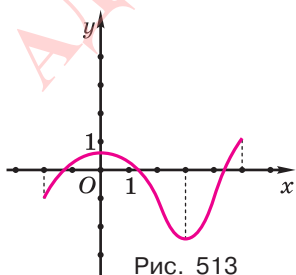


Рис. 513

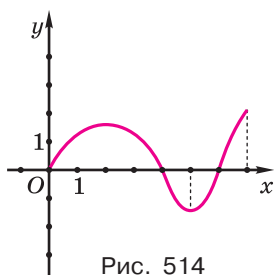


Рис. 514

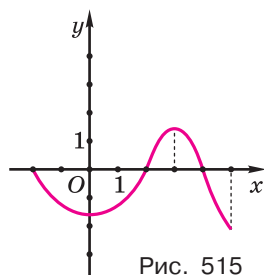


Рис. 515



1174. На бумаге в клетку построен прямоугольник, стороны которого принадлежат линиям сетки. Размеры прямоугольника $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно простые. Учитывая, что диагональ прямоугольника не пересекает во внутренних пунктах 116 клеток, определите, сколько клеток она может пересекать.

1175. Угол A треугольника ABC равен 50° , а угол C равен 70° . На сторонах AB и BC отмечены соответственно такие точки P и Q , что $\angle ACP = \angle CAQ = 30^\circ$. Учитывая, что отрезки AP и CQ пересекаются в точке M , найдите:

- а) $\angle ABM$; б) $\angle CPQ$.

1176. Можно ли на плоскости отметить 225 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя точками было не меньше 3 и не больше 21?

24. Тригонометрические функции

Изученные в IX классе преобразования графиков функций позволяют, используя графики простейших тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, строить графики более сложных тригонометрических функций.

Пример 1. Построим график функции

$$y = 2 \sin \left(3x + 1\frac{1}{2} \right).$$

Учтём, что $y = 2 \sin \left(3x + 1\frac{1}{2} \right) = 2 \sin 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)$. Поэтому искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ в результате следующей последовательности преобразований:

– сжатием в 3 раза графика функции $y = \sin x$ к оси ординат получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 516);

– сдвигом графика функции $y = \sin 3x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{1}{2}$ влево получим график функции $y = \sin 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)$ (рис. 517);

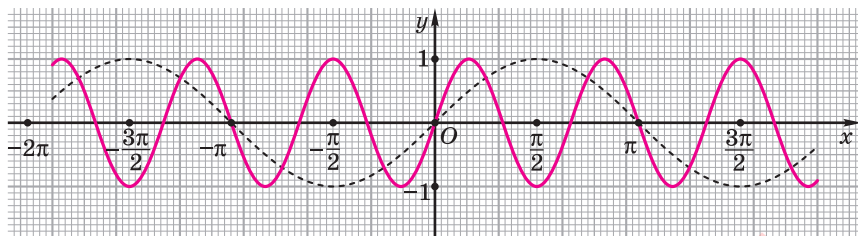


Рис. 516

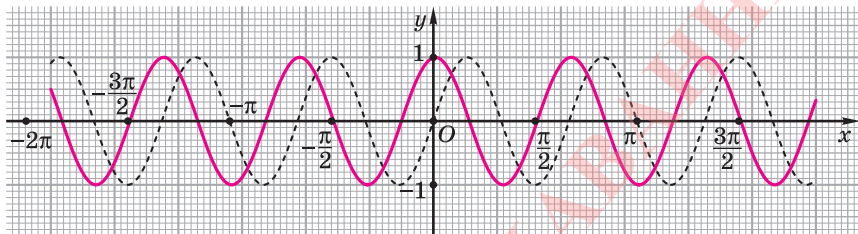


Рис. 517

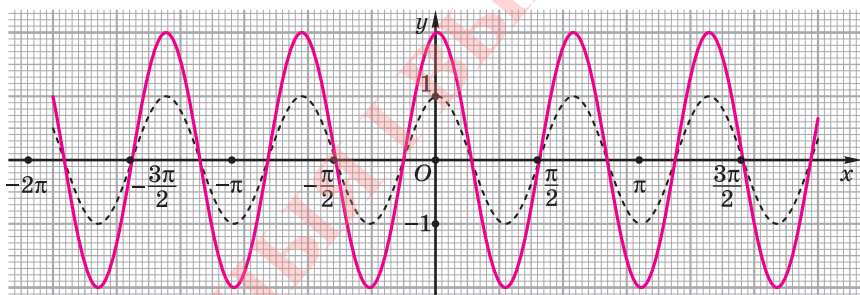


Рис. 518

– растяжением графика функции $y = \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ от оси абсцисс в 2 раза получим график функции $y = 2 \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (рис. 518).

При преобразованиях графика функции $y = f(x)$ в соответствии с формулами $y = f(x) + c$ (сдвиг вдоль оси ординат), $y = f(x + c)$ (сдвиг вдоль оси абсцисс), $y = -f(x)$ (симметрия относительно оси абсцисс), $y = f(-x)$ (симметрия относительно оси ординат), $y = kf(x)$ (растяжение от оси абсцисс или сжатие к ней), $y = f(kx)$ (сжатие к оси ординат или растяжение от неё) определённые характеристики функции наследуются.

Отмеченное обстоятельство позволяет упростить исследование функций вида $y = A \sin(kx + b)$ и $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ — достаточно найти их периоды, точки их нулевых значений, точки максимумов и точки минимумов.

Теорема 18. *Функции $y = A \sin(kx + b)$ и $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ периодические и их наименьшие положительные периоды соответственно равны $\frac{2\pi}{|k|}$ и $\frac{\pi}{|k|}$.*

Доказательство. В соответствии с определением число T есть период функции $y = A \sin(kx + b)$, если при всех значениях аргумента x истинно равенство

$$A \sin(k(x + T) + b) = A \sin(kx + b),$$

или

$$2A \sin \frac{kT}{2} \cos \left(kx + b + \frac{kT}{2} \right) = 0.$$

Это равенство тождественно истинно, если $\sin \frac{kT}{2} = 0$. Поэтому $\frac{kT}{2} = m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$, или $T = \frac{2m\pi}{k}$. А из чисел $\frac{2m\pi}{k}$, где $m \in \mathbb{Z}$, наименьшим положительным является число $\frac{2\pi}{|k|}$.

Утверждение о периодичности функции $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ доказывается аналогично.

Следствие. *Функции $y = A \cos(kx + b)$ и $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$ периодические и их наименьшие положительные периоды соответственно равны $\frac{2\pi}{|k|}$ и $\frac{\pi}{|k|}$.*

Для доказательства достаточно использовать тождества

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \text{ и } \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Пример 2. Исследуем функцию $y = -2 \frac{1}{2} \cos \left(\left| \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3} \right)$.

Рассмотрим сначала эту функцию на промежутке $[0; +\infty)$, на котором она задаётся формулой

$$y = -2 \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Период этой функции равен $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$, т. е. 3π .

Найдём точки, в которых значение функции равно нулю:

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= 0 \equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in N_0 \equiv \\ &\equiv x = \frac{\pi}{4} + \frac{3n\pi}{2}, n \in N_0. \end{aligned}$$

Найдём точки максимумов:

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \equiv \\ &\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2n\pi, n \in N_0 \equiv x = \pi + 3n\pi, n \in N_0. \end{aligned}$$

Найдём точки минимумов:

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= -2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \equiv \\ &\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi, m \in N \equiv x = -\frac{\pi}{2} + 3m\pi, m \in N_0. \end{aligned}$$

Напомним, что мы пока что рассматриваем только неотрицательные значения аргумента. Поэтому для значений переменной n выбираем только неотрицательные целые числа, на что указывает запись $n \in N_0$.

Отметим полученные точки на оси абсцисс, учитывая, что достаточно рассмотреть промежуток длиной 3π , равный периоду. Нам удобно взять промежуток $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, левый конец которого есть один из нулей функции. В результате получим точки $A\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$, $B\left(\pi; 2\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7\pi}{4}; 0\right)$, $D\left(\frac{5\pi}{2}; -2\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{13\pi}{4}; 0\right)$ (рис. 519). Эти точки отчётливо показывают ход графика на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, который приведён на рисунке 520. График функции на промежутке $\left(\frac{13\pi}{4}; +\infty\right)$ получается из графика

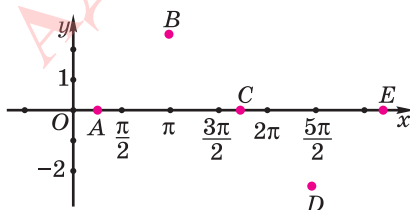


Рис. 519

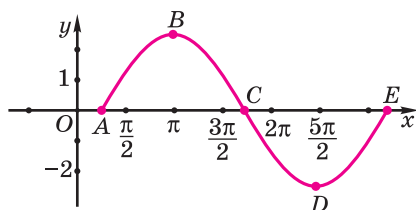


Рис. 520

Для получения графика на $\mathbb{R}$ учтём, что функция $y = -2\frac{1}{2}\cos\left(\left|\frac{2}{3}x\right| + \frac{\pi}{3}\right)$ — чётная, поэтому её график симметричен относительно оси ординат (рис. 523).



Учитывая, что $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, данную функцию можно записать в виде $z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$. Теперь понятен и построения графика:

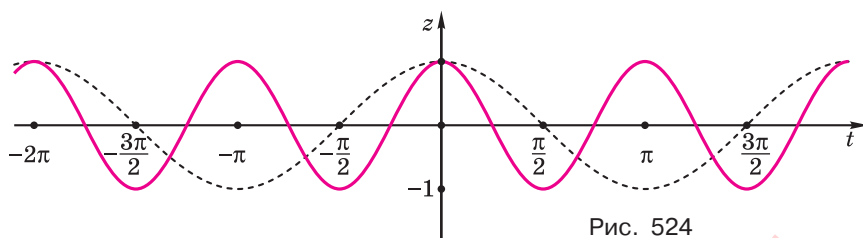


Рис. 524

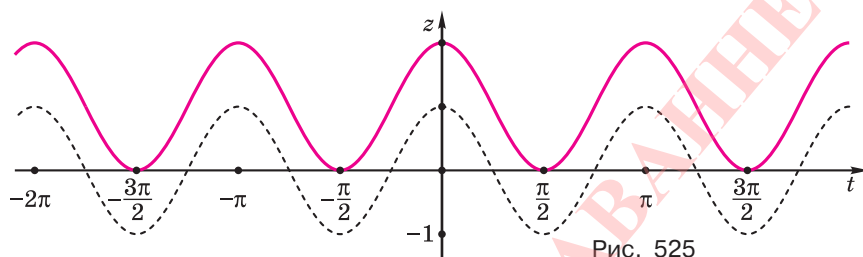


Рис. 525

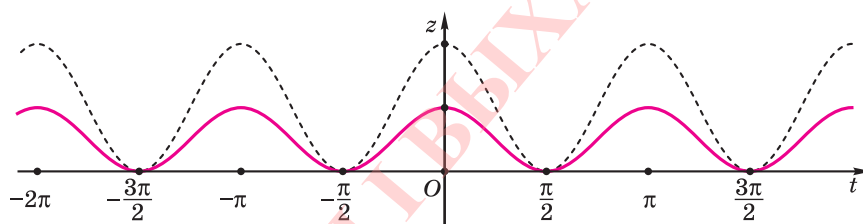


Рис. 526

- сжатие графика функции $z = \cos t$ в 2 раза к оси ординат (рис. 524);
- сдвиг графика функции $z = \cos 2t$ на 1 вдоль оси ординат (рис. 525);
- сжатие графика функции $z = 1 + \cos 2t$ в 2 раза к оси абсцисс (рис. 526).

Многие реальные процессы описываются функциями вида

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Такие процессы называются *гармоническими колебаниями*.

Если на прямой, по которой движется на пружине шарик C , ввести координаты так, чтобы в положении равновесия координата x шарика C была равна нулю, оттянуть шарик в положительном направлении на расстояние A и в мо-

мент времени t , равный нулю, отпустить его (рис. 527), то зависимость координаты x шарика C от времени t будет выражаться законом $x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, где ω — некоторый коэффициент, характеризующий жёсткость пружины.

Если колебательный контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C и катушки индуктивности L (рис. 528), имеет некоторый запас энергии, например, ненулевой заряд в конденсаторе, то по этой цепи пойдёт электрический ток, а напряжение U на обкладках конденсатора будет изменяться по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \alpha)$, где ω — некоторая характеристика контура, которая определяется параметрами конденсатора и катушки, U_0 и α определяются состоянием цепи в начальный момент времени.

Гармоническое колебание целиком определяется параметрами A , ω и ϕ , которые соответственно называются *амплитудой*, *угловой скоростью* (или *круговой частотой*), *начальной фазой колебания*. Период такой функции равен $\frac{2\pi}{\omega}$, его называют *периодом гармонического колебания*.

Гармонические колебания часто приходится складывать. В механике это связано с тем, что на точку может действовать несколько сил, каждая из которых вызывает гармонические колебания. В электротехнике и радиотехнике сложение колебаний происходит при наложении токов.

Пример 4. Найдём амплитуду и начальную фазу гармонического колебания $u = 60 \sin 2t + 11 \cos 2t$.

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} u &= 60 \sin 2t + 11 \cos 2t \equiv \\ &\equiv u = \sqrt{60^2 + 11^2} \left(\frac{60}{\sqrt{60^2 + 11^2}} \sin 2t + \frac{11}{\sqrt{60^2 + 11^2}} \cos 2t \right) \equiv \\ &\equiv u = 61 \left(\frac{60}{61} \sin 2t + \frac{11}{61} \cos 2t \right) \equiv u = 61 (\cos \alpha \sin 2t + \sin \alpha \cos 2t), \\ &\text{где } \frac{60}{61} = \cos \alpha \text{ и } \frac{11}{61} = \sin \alpha \equiv u = 61 \sin (2t + \alpha). \end{aligned}$$

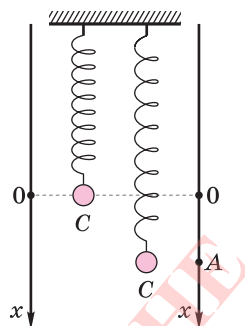


Рис. 527

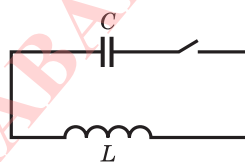


Рис. 528

Значит, амплитуда и начальная фаза колебания соответственно равны 61 и $\arcsin \frac{11}{61}$.

Отметим, что период суммы или разности двух гармонических колебаний с разными соизмеримыми круговыми частотами равен наименьшему общему кратному периодов этих колебаний.

Пример 5. Исследуем функцию $V = 2\sqrt{3} \sin y + \cos 2y$.

Период функции равен НОК $(2\pi; \pi)$, т. е. 2π .

Найдём критические точки функции:

$$V' = 2\sqrt{3} \cos y - 2 \sin 2y;$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \cos y - 2 \sin 2y = 0 &\equiv 2\sqrt{3} \cos y - 4 \sin y \cos y = 0 \equiv \\ &\equiv 4 \cos y \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) = 0 \equiv \cos y = 0, \text{ или } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \equiv \\ &\equiv y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } y = (-1)^l \frac{\pi}{3} + l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Результаты дальнейшего исследования на промежутке $[0; 2\pi]$, равном периоду, представлены в таблице.

y	0	$\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$
V'	0	+	0	-	0	+
V	1	$\nearrow$	$\max_{2,5}$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{2} - 1$ min	$\nearrow$

y	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	2π
V'	0	-	0	+	0
V	$\max_{2,5}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{2} - 1$ min	$\nearrow$	1

Для уточнения хода графика найдём точки его пересечения с осью абсцисс:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \sin y + \cos 2y = 0 &\equiv 2\sqrt{3} \sin y + 1 - 2\sin^2 y = 0 \equiv \\ &\equiv 2\sin^2 y - 2\sqrt{3} \sin y - 1 = 0 \equiv \sin y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{или } \sin y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \equiv y = \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } y = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}, l \in \mathbb{Z}.$$

Из этих чисел в промежуток $[0; 2\pi]$ попадают числа $\arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} + 2\pi$ и $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}$, приближённо равные 6,03 и 3,39.

Проведённое исследование позволяет начертить график функции на промежутке $[0; 2\pi]$ (рис. 529). График функции на всей координатной прямой получается сдвигами на $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, по оси абсцисс (рис. 530).

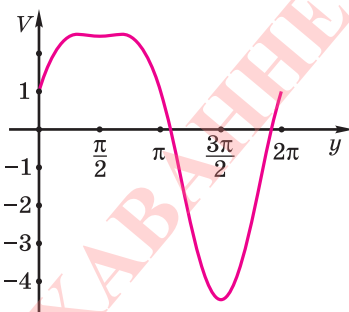


Рис. 529

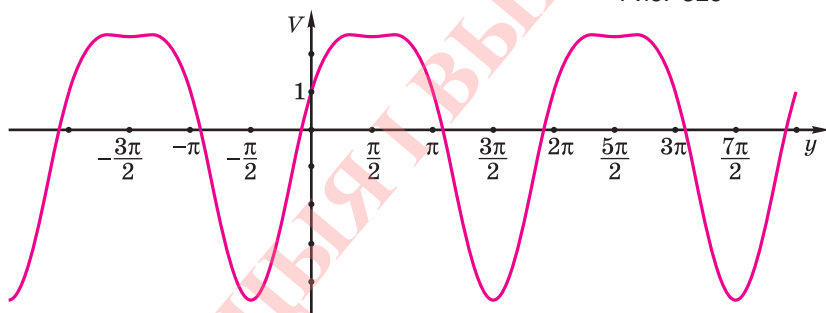


Рис. 530



1. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(x) + c$; график функции $y = f(x + c)$?
2. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = -f(x)$; график функции $y = f(-x)$?
3. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = |f(x)|$; график функции $y = f(|x|)$?
4. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(kx)$ при $k > 1$; график функции $y = f(kx)$ при $0 < k < 1$?
5. Чему равен период функции $A \sin(kx + b)$; $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$; $y = A \cos(kx + b)$; $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$?
6. Какой процесс называют гармоническим колебанием?
7. Что называют амплитудой, круговой частотой, периодом, начальной фазой гармонического колебания?

1177. Перепишите таблицу в тетрадь и, заполнив пропуски, укажите основные свойства тригонометрических функций.

Свойство	Функция			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$\mathbb{R}$			$\mathbb{R}$, кроме чисел $n\pi$
Область значений				
Чётность		Чётная		
Наименьший положительный период			π	
Точки пересечения с осью абсцисс	$(n\pi; 0)$			
Точка пересечения с осью ординат				Нет
Промежутки положительных значений			$\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	
Промежутки отрицательных значений				
Промежутки возрастания				
Промежутки убывания				
Точки минимума		$\pi + 2n\pi$		Нет
Минимумы	-1			
Точки максимума				
Максимумы				

1178. На каждом из рисунков 531—535 в пределах одного периода представлены две тангенсоиды, одна из них получается из другой определённым преобразованием. Запишите уравнение сплошной тангенсоиды и преобразование, которым она получена из штриховой тангенсоиды, учитывая рисунок:

а) 531; б) 532; в) 533; г) 534; д) 535.

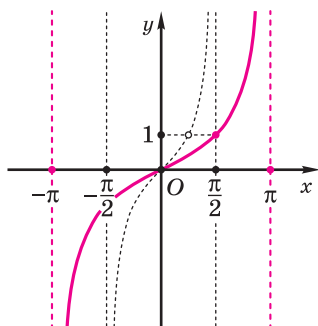


Рис. 531

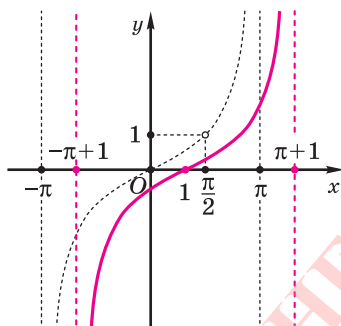


Рис. 532

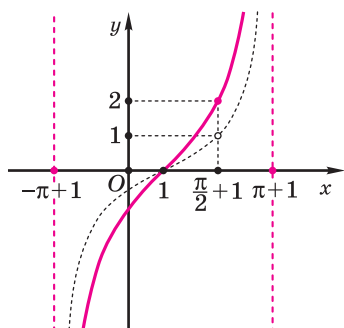


Рис. 533

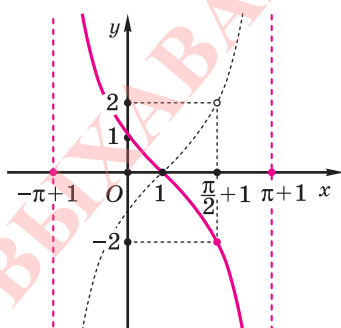


Рис. 534

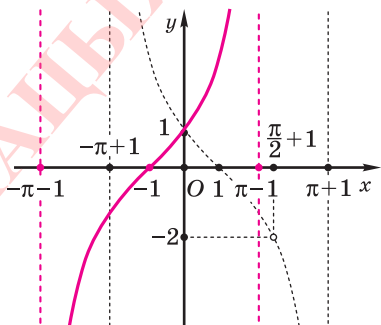


Рис. 535

1179. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 3 \cos 2x - 1$;

в) $y = 2 - \operatorname{tg} 3x$;

б) $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

г) $1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x$.

1180. Найдите период функции:

а) $y = \sin \pi x$;

в) $y = \operatorname{tg} 3\pi x$;

б) $y = \cos \frac{\pi}{2} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} x$.

1181. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3}$;

д) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 3x$;

б) $y = -\frac{3}{2} \cos 3x$;

е) $y = -2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$;

в) $y = -2 \sin 2x$;

ж) $y = -3 \cos 1\frac{1}{2}x$;

г) $y = 3 \sin \frac{x}{3}$;

з) $y = \frac{5}{2} \sin \frac{4}{3}x$.

1182. Исследуйте функцию f и постройте её график, учитывая, что:

а) $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $f(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

з) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)$;

г) $f(x) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

и) $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 3x\right)$.

д) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

1183. Найдите период, нули и постройте график функции:

а) $y = \sin \frac{4}{3}x$;

д) $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{3}x$;

б) $y = \cos \frac{5}{3}x$;

е) $y = \sin \frac{2}{3}x$;

в) $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3}x$;

ж) $y = \cos \frac{4}{3}x$;

г) $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{6}x$;

з) $y = \operatorname{ctg} \frac{2}{3}x$.

1184. Найдите период, нули и постройте график функции:

а) $y = 2 \sin\left(\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$;

в) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$;

б) $y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$;

г) $y = -2 \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$;

$$\begin{array}{ll} \text{д) } y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{3}(x - \pi)\right); & \text{ж) } 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right); \\ \text{е) } y = -2 \cos\left(\frac{2}{3}(x - \pi)\right); & \text{з) } y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right). \end{array}$$

1185. Точка выполняет гармонические колебания по закону $x(t) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right)$. Определите, в какой ближайший к началу движения момент времени сдвиг точки:

- а) максимальный; в) равен 5;
б) равен 0; г) равен -10.

1186. Определите амплитуду A , период T , круговую частоту ω и начальную фазу φ гармонического колебания:

- а) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = 3 \cos 3t$;
б) $y = 7 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; д) $y = 2 \sin(3\pi t + 1)$;
в) $y = \cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$; е) $y = 3 \cos(4\pi t - 2)$.

1187. Постройте график гармонического колебания:

- а) $y = 3 \sin\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$; в) $y = \frac{1}{3} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$;
б) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3t + \frac{6\pi}{5}\right)$; г) $y = \frac{3}{2} \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

1188. Найдите амплитуду, период, круговую частоту и начальную фазу гармонического колебания, которое определяется законом:

- а) $\sin x + \sqrt{3} \cos x$; е) $-7 \sin 2x - 24 \cos 2x$;
б) $\sin x - \cos x$; ж) $3 \sin 3x + 2\sqrt{2} \cos 3x$;
в) $3 \sin x + 4 \cos x$; з) $\sin 5x + \cos 5x$;
г) $4 \sin x - 3 \cos x$; и) $33 \sin 6x - 56 \cos 6x$.
д) $5 \sin x - 12 \cos x$;

1189. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

- а) $8 \sin x + 15 \cos x$; г) $5 - 7 \sin x - 24 \cos x$;
б) $8 \sin x - 15 \cos x$; д) $\sqrt{\sin x - \cos x}$;
в) $-5 \sin x + 12 \cos x$; е) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

1190. Докажите, что уравнение $\sqrt{99} \sin x - 49 \cos x = 51$ не имеет корней.

1191. Постройте график функции:

а) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$; б) $y = \sin 2x - \cos 2x$.

1192. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = -\sin t$; г) $y = \cos^3 t$; ж) $y = \sin^2 t - \cos^2 t$;

б) $y = -\cos t$; д) $y = \sin t \cos t$; з) $y = \sin 2x$;

в) $y = \sin^2 t$; е) $y = \sin t + \cos t$; и) $y = \sin 5x$.

1193. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = \sin 2x + 1$; е) $y = \operatorname{tg} 3x \sin 2x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y = \frac{\cos x}{x}$;

в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \frac{x}{\sin x}$;

г) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; и) $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$.

д) $y = \operatorname{tg} 2x \cos 4x$;

1194. Постройте график функции:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y = |\sin x|$;

б) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \sin x + |\sin x|$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$; и) $y = \cos x + |\cos x|$;

г) $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; к) $y = |\operatorname{tg} 2x|$;

д) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; л) $y = \sin x + \cos x$;

е) $y = \sin^2 x$; м) $y = \sin x + 2 \cos x$.

1195. Постройте график функции:

а) $y = \sin x + \cos x$; е) $y = \sin^2 2x$;

б) $y = \sin x - \cos x$; ж) $y = \sin^2 3x$;

в) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$; з) $y = \cos^2 3x$;

г) $y = \sin^2 x$; и) $y = \frac{1}{2} \sin^2 4x$.

д) $y = \cos^2 2x$;

1196. Постройте график функции:

а) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos 2x - \cos 4x$;

б) $y = \sin x + \cos 2x$; д) $y = \sin 3x - \sin 6x$;

в) $y = \cos x - \sin 2x$; е) $y = \sin 3x + \cos 6x$.

1197. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 9 \sin^2 y + 6 \cos y$.

1198. Исследуйте на чётность и периодичность функцию:

а) $y = \sin \sqrt{x}$; б) $y = \sin \sqrt{x^2}$.

1199. Найдите наименьший положительный период T функции

$$y = \sin \frac{2t}{15} - 3 \cos \frac{4t}{21} + \sin \frac{6t}{35}.$$

1200. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \arccos \sqrt{x}$;

б) $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1+x^2}$;

г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}$;

д) $y = \operatorname{arctg} \frac{4x}{x^2+4}$;

е) $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{t} + \arccos \sqrt{t}$;

з) $y = \arcsin \sqrt{1+t+t^2} + \arccos \sqrt{1-t+t^2}$;

и) $y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \operatorname{arctg} t$.

1201. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC к его плоскости возведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 . Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1 , учитывая, что $A_1C = 20$ м, $A_1A = 12$ м, $B_1C = 24$ м, $B_1B = 8$ м и отрезок A_1B_1 с плоскостью треугольника:

а) не имеет общих точек;

б) имеет общие точки.

1202. Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из её вершины на основание. Боковые рёбра треугольной пирамиды равны d . Найдите высоту пирамиды, учитывая, что основанием является:

а) равносторонний треугольник со стороной 1;

б) прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4;

в) треугольник со сторонами 4, 5, 6.

1203. Боковые рёбра треугольной пирамиды равны d . Найдите высоту пирамиды, учитывая, что основанием является равнобедренный треугольник с боковой стороной 1 и углом против основания, равным:

- а) 120° ; б) 135° ; в) 150° .

1204. Есть треугольная пирамида $QABC$, у которой основание ABC — равнобедренный треугольник с равными сторонами AB и BC , а боковое ребро QB перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, учитывая, что рёбра AQ и AC соответственно равны 13 см и 10 см, а высота QH грани QAC образует с плоскостью основания угол в 60° .

1205. Из точки C к плоскости β под углами 30° и 45° проведены перпендикулярные друг другу наклонные CA и CB . Найдите угол, который с плоскостью β образует перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую AB .

1206. Через вершину A меньшего угла треугольника со сторонами, равными 17 см, 15 см и 8 см, проведена прямая AM , перпендикулярная его плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, учитывая, что $AM = 112$ см.

1207. Сплавляли кусок меди плотностью $8,96 \text{ г/см}^3$ и кусок цинка плотностью $7,13 \text{ г/см}^3$ и получили 10 дм^3 латуни плотностью $8,32 \text{ г/см}^3$. Найдите с точностью до десятой килограмма массы взятых кусков.

* * *

1208. Докажите, что если $xy = 1$ и $x > y$, то истинно неравенство

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}.$$

1209. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Какой может быть третья высота этого треугольника?

1210. Определите, какое наибольшее количество простых чисел может встретиться среди 17 последовательных натуральных чисел, больших 3.

Справочный материал

АРИФМЕТИКА

В арифметике изучаются числа, действия над числами, числовые выражения.

Натуральные числа

Натуральные числа в десятичной позиционной системе счисления записываются с помощью знаков

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

которые называют *цифрами*.

Любая последовательность цифр, не начинающаяся с цифры 0, представляет натуральное число. Все натуральные числа вместе составляют множество натуральных чисел, обозначаемое $\mathbb{N}$.

Над натуральными числами всегда выполнимы действия *сложения*, *умножения* и *возведения в степень*.

Прибавить к натуральному числу a натуральное число b означает к натуральному числу a присчитать последовательно b единиц:

$$a + b \stackrel{\text{опр}}{=} (\dots((a + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{b \text{ единиц}}) + 1) + 1) + 1).$$

Если $a + b = c$, то числа a и b называют *слагаемыми*, а число c — *суммой*.

Умножить натуральное число a на натуральное число b означает натуральное число a взять слагаемым b раз:

$$a \cdot b \stackrel{\text{опр}}{=} (\dots((a + a) + a) + \dots + a) \quad b \text{ слагаемых}.$$

Если $a \cdot b = c$, то числа a и b называют *множителями*, а число c — *произведением*. Первый множитель a называют ещё *множимым*.

Действием, обратным сложению, является *вычитание*. Из натурального числа a *вычесть* натуральное число b означает найти такое натуральное число c , сумма которого и числа b равна числу a :

$$a - b = c \stackrel{\text{опр}}{\equiv} c + b = a.$$

Если $a - b = c$, то число a называют *уменьшаемым*, число b — *вычитаемым*, а число c — *разностью*.

Действием, обратным умножению, является *деление*. Натуральное число a *разделить* на натуральное число b означает найти такое натуральное число c , произведение которого и числа b равно числу a :

$$a : b = c \overset{\text{опр}}{\equiv} c \cdot b = a.$$

Если $a : b = c$, то число a называют *делимым*, число b — *делителем*, а число c — *частным*.

Натуральное число a *возвести в натуральную степень n* означает натуральное число a взять множителем n раз:

$$a^n \overset{\text{опр}}{=} (\underbrace{(a \cdot a) \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}).$$

Если $a^n = c$, то число a называют *основанием степени*, число n — *показателем степени*, а число c — *степенью*.

Вторая степень числа называется ещё *квадратом* числа, третья — *кубом* числа.

Действием, обратным возведению в степень, является *извлечение корня*. *Извлечь корень степени n из числа a* означает найти такое натуральное число c , что его n -я степень равна числу a :

$$\sqrt[n]{a} = c \overset{\text{опр}}{\equiv} c^n = a.$$

Если $\sqrt[n]{a} = c$, то число a называют *подкоренным числом*, число n — *показателем корня*, а число c — *корнем*.

Обратные действия — вычитание, деление и извлечение корня — не всегда выполнимы на множестве натуральных чисел. Например, нет натурального числа, которое является значением разности $3 - 7$, или которое является значением частного $3 : 7$, или которое является значением корня $\sqrt{2}$.

Корень второй степени называют *квадратным корнем*, третьей степени — *кубическим корнем*.

Если при делении натурального числа a на натуральное число b получится натуральное число c , то говорят, что натуральное число a *делится (целиком)* на натуральное число b , или что натуральное число a *кратно* натуральному числу b , или что число b есть делитель числа a .

Рассматривается ещё и *деление с остатком* одного натурального числа на другое. Натуральное число a *разделить с остатком* на натуральное число b означает найти такие целые неотрицательные числа p и q , что произведение числа p и числа b , сложенное с числом q , равно числу a :

$$a : b = p \text{ (остаток } q) \overset{\text{опр}}{\equiv} p \cdot b + q = a \text{ и } q < b.$$

Деление с остатком всегда выполнимо на множестве натуральных чисел.

Число, делящееся на 2, называется *чётным числом*, а не делящееся — *нечётным числом*.

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называются *чётными*, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — *нечётными*.

Свойство чётного числа: чётное число оканчивается чётной цифрой.

Свойство нечётного числа: нечётное число оканчивается нечётной цифрой.

Признак делимости числа на 2: если число оканчивается чётной цифрой, то оно делится на 2.

Свойство числа, делящегося на 5: если число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

Признак делимости числа на 5: если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5.

Свойство числа, делящегося на 3: если число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3.

Признак делимости числа на 3: если сумма его цифр делится на 3, то оно делится на 3.

Свойство числа, делящегося на 9: если число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости числа на 9: если сумма его цифр делится на 9, то оно делится на 9.

Число, имеющее точно два разных делителя — единицу и само себя, называется *простым числом*.

Число, имеющее более двух разных делителей, называется *составным числом*.

Каждое натуральное число однозначно разлагается в произведение простых множителей, если не учитывать порядок их записи. Если множитель входит в разложение определённого числа на простые множители несколько раз, то количество этих вхождений называется *кратностью множителя*.

Наибольшее из чисел, на которые делятся данные числа, называется *наибольшим общим делителем (НОД)* этих чисел.

Наименьшее из чисел, делящихся на все данные числа, называется *наименьшим общим кратным (НОК)* этих чисел.

Чтобы найти НОД нескольких натуральных чисел, можно разложить их на простые множители, выбрать общие множители с учётом их кратности и затем выбранные числа перемножить.

Чтобы найти НОК нескольких натуральных чисел, можно разложить их на простые множители, выбрать те множители, которые входят в разложение хотя бы одного данного числа наибольшей кратности, и затем выбранные числа перемножить.

Если НОД двух чисел равен единице, то такие числа называются *взаимно простыми*.

Неотрицательные рациональные числа

Долей называется одна из равных частей, на которые разделено целое.

Обыкновенной дробью называется любое количество долей.

Обыкновенная дробь, составленная из n -х долей, которых имеется m , за-

писывается как $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ долей}} = \frac{1}{n} \cdot m.$$

В записи $\frac{m}{n}$ число m называется *числителем* дроби, число n — *знаменателем* дроби.

Черта дроби и знак деления взаимно заменимы:

$$\frac{m}{n} = m : n.$$

Если числитель дроби меньше его знаменателя, то дробь называется *правильной*.

Если числитель дроби больше её знаменателя или равен ему, то дробь называется *неправильной*.

Если в неправильной дроби, например, $\frac{10}{3}$, выделить её целую и дробную части и записать их друг за другом, то полученную запись $3\frac{1}{3}$ называют *смешанной дробью*.

$$3\frac{1}{3} \stackrel{\text{опр}}{=} 3 + \frac{1}{3}.$$

Чтобы неправильную дробь представить смешанной дробью, можно числитель неправильной дроби разделить с остатком на её знаменатель.

Чтобы смешанную дробь представить неправильной дробью, можно целую часть смешанной дроби умножить на знаменатель её дробной части, к полученному произведению прибавить числитель дробной части и полученную сумму записать числителем неправильной дроби, оставив прежний знаменатель.

Основное свойство дроби: величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число.

Умножение числителя и знаменателя обыкновенной дроби на одно и то же число называется *приведением дроби к новому знаменателю*.

Деление числителя и знаменателя обыкновенной дроби на одно и то же число называется *сокращением дроби*.

Сокращением дробь можно свести к простейшей дроби с взаимно простыми числителем и знаменателем, которая называется *несократимой дробью*.

Имеется бесконечно много дробей, равных друг другу:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots$$

Каждая из равных друг другу дробей есть *представитель* определённого *рационального числа*. Среди представителей того или иного рационального числа имеется представитель с наименьшим знаменателем, которым является *несократимая дробь*.

Каждое натуральное число имеет бесконечно много представителей:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots$$

Дроби представляют также и числа, которые не являются натуральными. Такие числа называют *дробными числами*.

Чтобы привести дроби к общему знаменателю, можно в качестве общего знаменателя взять НОД знаменателей данных дробей и умножить

числитель и знаменатель каждой из дробей на частное от деления общего знаменателя на знаменатель соответствующей дроби. Частное от деления общего знаменателя данных дробей на знаменатель той или иной дроби называется *дополнительным множителем*.

Чтобы сложить две дроби с одинаковыми знаменателями, достаточно сложить их числители, оставляя знаменатель прежним:

$$\frac{m}{k} + \frac{n}{k} = \frac{m+n}{k}.$$

Чтобы сложить две дроби с разными знаменателями, надо предварительно привести их к общему знаменателю.

Чтобы из одной дроби вычесть другую дробь со знаменателем, равным знаменателю первой дроби, достаточно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, оставляя знаменатель прежним:

$$\frac{m}{k} - \frac{n}{k} = \frac{m-n}{k}.$$

Чтобы выполнить вычитание дробей с разными знаменателями, надо предварительно привести их к общему знаменателю.

Чтобы умножить дробь на натуральное число, можно умножить на это число числитель дроби, оставляя знаменатель прежним, или разделить на это число знаменатель, оставляя числитель прежним:

$$\frac{m}{n} \cdot k = \frac{m \cdot k}{n} = \frac{m}{n:k}.$$

Чтобы разделить дробь на натуральное число, можно разделить на это число числитель дроби, оставляя знаменатель прежним, или умножить на это число знаменатель, оставляя числитель прежним:

$$\frac{m}{n} : k = \frac{m:k}{n} = \frac{m}{n \cdot k}.$$

Чтобы умножить дробь на дробь, достаточно перемножить отдельно их числители и знаменатели, записывая произведение числителей в числителе дроби-произведения, а произведение знаменателей — в знаменателе дроби-произведения:

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{nl}.$$

Два числа, произведение которых равно единице, называют *обратными* друг другу.

Чтобы одну дробь разделить на другую, достаточно первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{k}{l} : \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \cdot \frac{n}{m} = \frac{kn}{lm}.$$

Обыкновенная дробь, знаменателем которой является разрядная единица, называется *десятичной дробью*.

Обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную делением числителя на знаменатель. При этом полученная десятичная дробь будет конечной или бесконечной периодической без предпериода или с предпериодом:

$$\frac{3}{40} = 0,075; \quad \frac{31}{37} = 0,(837); \quad \frac{62}{165} = 0,3(75).$$

Чтобы конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную, можно записать дробь с числителем, равным дробной части десятичной дроби, и знаменателем, равным разрядной единице со столькоими нулями, сколько имеется цифр в дробной части десятичной дроби, и затем сократить полученную обыкновенную дробь:

$$0,075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}.$$

Чтобы бесконечную периодическую десятичную дробь без предпериода преобразовать в обыкновенную дробь, можно записать обыкновенную дробь, числитель которой равен периоду, а знаменатель — числу, записанному столькоими девятками, сколько имеется цифр в периоде, и затем сократить полученную обыкновенную дробь:

$$0,(837) = \frac{837}{999} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37}.$$

Чтобы бесконечную периодическую десятичную дробь с предпериодом преобразовать в обыкновенную дробь, можно записать обыкновенную дробь, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами от десятичной запятой до конца первого периода, и числом, записанным цифрами предпериода, а знаменатель — числу, записанному столькоими девятками, сколько цифр в периоде, и столькоими нулями, сколько цифр в предпериоде:

$$0,3(75) = \frac{375 - 3}{990} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37}.$$

Сотая доля называется *процентом*, а тысячная — *промилле*. Процент обозначают знаком %, а промилле — знаком ‰:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01; 47\% = \frac{47}{100} = 0,47;$$

$$1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0,001; 47\text{‰} = \frac{47}{1000} = 0,047.$$

Рациональные числа

Если на прямой p взять некоторую точку O в качестве начала отсчёта, выбрать одно из двух направлений и единичный отрезок OE , то этим самым задаётся *координатная прямая*.



Если от начала отсчёта O на данной прямой в выбранном направлении отложить отрезок, длина которого равна данному числу t , то получим точку A . Число t называют *координатой точки* A . Это записывают так: $A(t)$. Для точек O и E имеем соответственно: $O(0)$ и $E(1)$.

Луч OE координатной прямой называют *положительным лучом*, другой её луч — *отрицательным лучом*.

Точке B , симметричной точке A относительно начала отсчёта O , присваивается координата $-t$. Числа t и $-t$ называют *противоположными числами*.

Числа, которым соответствуют точки координатной прямой, расположенные на положительном луче, называются *положительными числами*. Они могут записываться как со знаком «+», так и без него. Записи вида +1 и 1 представляют одно и то же число.

Числа, которым соответствуют точки координатной прямой, расположенные на отрицательном луче, называются *отрицательными числами*. Отрицательные числа записываются со знаком «-».

Число 0 не считают ни отрицательным, ни положительным.

Модулем $|t|$ числа t называется само это число, если оно положительное или равно нулю, и противоположное число, если — отрицательно:

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{если } t \text{ — положительное число или число } 0, \\ -t, & \text{если } t \text{ — отрицательное число.} \end{cases}$$

Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их модули и перед суммой поставить их общий знак.

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и результат записать со знаком того числа, модуль которого больше.

Чтобы из одного числа вычесть другое число, можно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Чтобы умножить два числа, надо перемножить их модули и результат записать со знаком плюс, если множители имеют одинаковые знаки, и со знаком минус — если разные знаки.

Чтобы разделить одно число на другое, можно делимое умножить на число, обратное делителю.

Натуральные числа называют ещё *положительными целыми числами*. Числа, противоположные натуральным числам, называют *отрицательными целыми числами*. Множество $\mathbb{Z}$ *целых чисел* — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Целые числа вместе с дробными, как положительными, так и отрицательными, составляют множество $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел*.

Действительные числа

Во множестве рациональных чисел становятся всегда выполнимыми вычитание и деление — действия, обратные сложению и умножению. Но действие извлечения корня, обратное действию возведения в степень, не всегда выполнимо. Например, число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Рациональные числа представляются десятичными дробями — конечными или бесконечными периодическими. Каждая десятичная дробь, как конечная, так и бесконечная периодическая, представляет некоторое рациональное число. Бесконечные непериодические десятичные дроби представляют *иррациональные числа*:

$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ \dots$$

К иррациональным числам приводит не только действие извлечения корня. Действия нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, за редким исключением, порождают иррациональные числа:

$$\sin 2^\circ = 0,034\ 899\ 496\ 702\ 500\ 971\ 645\ 995\ 181\ 625\ 333\dots;$$

$$\operatorname{tg} 89^\circ = 57,289\ 961\ 630\ 759\ 424\ 687\ 278\ 147\ 537\ 113\dots$$

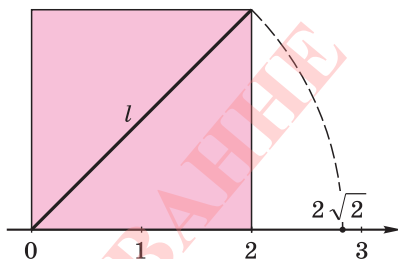
Иррациональным является и известное вам число π :

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279...$$

Рациональные числа вместе с иррациональными числами составляют множество $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Каждому рациональному числу соответствует единственная точка координатной прямой, но не каждая точка координатной прямой имеет своей координатой рациональное число.

На рисунке показано построение точки, координатой которой является длина l диагонали квадрата со стороной 2, а эта длина выражается числом $2\sqrt{2}$, не являющимся рациональным. Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и каждая точка координатной прямой имеет координатой действительное число.



Сравнение действительных чисел

Для любых двух действительных чисел a и b истинно одно и только одно из утверждений: a меньше b ; a равно b ; a больше b .

Отношения a меньше b , a равно b , a больше b обозначаются формулами $a < b$, $a = b$, $a > b$ соответственно и вводятся следующим определением:

$$a < b \stackrel{\text{опр}}{=} a - b < 0; \quad a = b \stackrel{\text{опр}}{=} a - b = 0; \quad a > b \stackrel{\text{опр}}{=} a - b > 0.$$

Формулами $a \geq b$, $a \neq b$ и $a \leq b$ обозначают отношения a больше или равно b , a не равно b и a меньше или равно b . Первое из этих отношений истинно, если истинно хотя бы одно из отношений $a > b$ или $a = b$, второе — если не истинно отношение $a = b$, третье — если истинно хотя бы одно из отношений $a < b$ или $a = b$.

Формулой $a < x < b$ обозначается отношение x больше a и меньше b , которое истинно, если истинны отношения $a < x$ и $x < b$. Аналогично определяются отношения $a \leq x < b$ и $a < x \leq b$.

Отношение $a = b$ называют равенством, отношения $a < b$, $a > b$, $a \geq b$, $a \neq b$ и $a \leq b$ — неравенствами. Неравенства $a < b$ и $a > b$ называют строгими неравенствами, а неравенства $a \geq b$ и $a \leq b$ — нестрогими неравенствами.

Отношение равно имеет такие свойства:

- если $a = b$, то $b = a$ (симметричность);
- если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (транзитивность).

Отношение меньше имеет такие свойства:

- если $a < b$, то $b > a$;
- если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность);
- если $a < b$, то $a + c < b + c$;
- если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;

если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;

если $a < b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$;

если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$;

если $a < b$ и a и b — положительные числа, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

если $a < b$, a и b — положительные числа и n — натуральное число, то $a^n < b^n$.

Аналогичные свойства имеет и отношение *больше*.

Из двух натуральных чисел больше то, которое при счёте называется позже.

Натуральные числа и десятичные дроби сравнивают поразрядно, начиная со старшего разряда.

Из двух положительных обыкновенных дробей с равными знаменателями больше та, у которой числитель больше. Из двух положительных обыкновенных дробей с равными числителями больше та, у которой знаменатель меньше. Чтобы сравнить две обыкновенные дроби с разными числителями и знаменателями, можно эти дроби заменить равными им дробями с равными знаменателями, приведя их к общему знаменателю.

Из двух действительных чисел с разными знаками большим является положительное число. Число 0 больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, модуль которого меньше. Из двух положительных действительных чисел больше то, модуль которого больше.

Средние величины

Средним арифметическим $\bar{a}$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется их сумма, разделённая на их количество n :

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Средним геометрическим g n положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется корень n -й степени из их произведения:

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Среднее арифметическое $\bar{a}$ и среднее геометрическое g одних и тех же чисел связаны неравенством $g \leq \bar{a}$.

Свойства действий над числами

Сложение и умножение натуральных чисел имеют переместительное и сочетательное свойства, а умножение по отношению к сложению имеет распределительное свойство:

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Число 0 имеет такие свойства:

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a + (-a) = 0;$$

$$a - 0 = a; \quad 0 - a = -a;$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

$0 : a = 0$, если $a \neq 0$; выражение $a : 0$ не имеет значения.

Число 1 имеет такие свойства:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; a \cdot \frac{1}{a} = 1;$$

$$1 : a = \frac{1}{a}, \text{ если } a \neq 0; a : 1 = a.$$

Пропорции

Отношением значений некоторой величины называют частное от деления одного из этих значений на другое. Если делимое больше делителя, то отношение показывает, во сколько раз первое значение больше второго, в обратном случае — какую часть первое значение составляет от второго.

Чтобы найти отношение значений величины, надо привести их к одной единице измерения и первое число разделить на второе.

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *пропорцией*.

Если имеется пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то числа a и d называют *крайними членами* пропорции, а числа b и c — её *средними членами*.

Если равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ истинно, то соответствующая пропорция называется *правильной пропорцией*, в обратном случае — *неправильной пропорцией*.

Если пропорция *правильная*, то произведение её крайних членов равно произведению средних членов.

Если произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов, то пропорция *правильная*.

Если переставить крайние члены *правильной* пропорции или её средние члены, то пропорция останется *правильной*:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ и } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Степень с рациональным показателем

Корнем n -й степени из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a .

Неотрицательный корень n -й степени из неотрицательного числа называют *арифметическим корнем n -й степени*.

Арифметический корень n -й степени имеет такие свойства:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ — нечётное натуральное число,} \\ |a|, & \text{если } n \text{ — чётное натуральное число;} \end{cases}$$

$$\text{утверждения } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$a > b \equiv \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ истинны при любых натуральных значениях n , m , k , больших единицы, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

утверждение $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ истинно при любом натуральном значении n ,

большем единицы, если $a \geq 0$ и $b > 0$;

утверждение $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ истинно при любом нечётном натуральном значении n , большем единицы.

Степень с рациональным показателем определяется следующим образом:

$$a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \text{ если } n \text{ — натуральное число и } n > 1;$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ если } a > 0, m \text{ — целое число, а } n \text{ — натуральное число};$$

$$a^{\frac{m}{n}} = 0, \text{ если } a = 0 \text{ и } \frac{m}{n} \text{ — положительное рациональное число};$$

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}, \text{ если } a \neq 0, q \text{ — положительное рациональное число}.$$

Для любых положительных действительных значений a и b и любых рациональных значений p и q истинны равенства:

$a^p a^q = a^{p+q};$	$(ab)^p = a^p b^p;$
$a^p : a^q = a^{p-q};$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{p \cdot q};$	

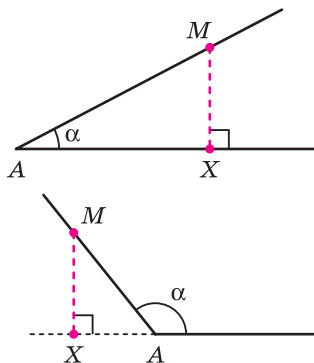
Любое действительное число можно представить в *стандартном виде*, т. е. записать произведением $c \cdot 10^n$, где $1 \leq c < 10$, а n — целое число. Число n называют *порядком числа*.

Тригонометрические числовые выражения

Синусом угла α называется отношение, первый компонент которого есть расстояние от произвольной точки M на одной стороне угла до прямой, содержащей другую сторону, а второй компонент — расстояние от точки M до вершины A угла:

$$\sin \alpha = \frac{MX}{MA}.$$

Косинусом угла α называется отношение, первый компонент которого есть расстояние от вершины A угла до проекции X произвольной точки M одной стороны угла на прямую, содержащую другую его сторону, а второй компонент — расстояние от вершины A до точки M , причём это отно-



шение имеет знак плюс, если проекция X попадает на сторону угла, и знак минус, если — на продолжение стороны:

$$\cos \alpha = \begin{cases} \frac{AX}{AM}, & \text{если } \alpha \leq 90^\circ, \\ -\frac{AX}{AM}, & \text{если } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ. \end{cases}$$

Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к его косинусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к его синусу:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника связаны с его сторонами:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \cos A = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Синус, косинус, тангенс, котангенс некоторых углов приведены в следующей таблице.

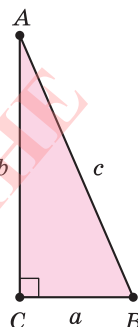
Угол α , °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Синус угла α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Косинус угла α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Тангенс угла α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Котангенс угла α	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существует

Синус, косинус, тангенс и котангенс одного и того же угла связаны формулами:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Для синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла истинны формулы приведения:

$$\begin{array}{lll} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; & \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha; & \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha; & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha. \end{array}$$



Для синуса и косинуса истинны *формулы сложения* и *формулы двойного угла*:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

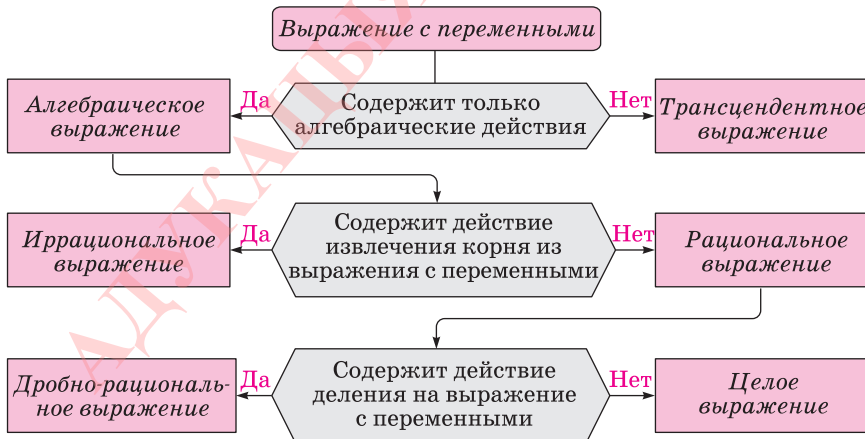
АЛГЕБРА

Выражения

Выражение. Тождественное преобразование выражения

В алгебре изучаются выражения с переменными, уравнения, неравенства, функции. Основным из этих понятий является понятие выражения с переменными. Уравнение или неравенство получается из двух выражений, если соединить их знаком $=$, $<$, $>$, $\neq$, $\geq$, $\leq$. Функция возникает тогда, когда в отношении выражения с переменными ставится вопрос относительно его значений при разных возможных значениях переменных.

Выражение с переменными образуется из чисел и переменных с помощью действий над числами, из которых вы знаете сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в рациональную степень (возведение в целую степень и извлечение корня), нахождение значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса. В зависимости от того, какие действия использованы при образовании выражения, его относят к тому или иному виду, отношения между которыми показывает следующая схема.



Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-нибудь её значение, то получится числовое выражение, значение которого называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях переменных.

Множество наборов значений переменных, при которых выражение с переменными имеет значения, называют *областью определения выражения*.

Целое выражение имеет значения при любых значениях входящих в неё переменных.

Дробно-рациональное выражение имеет значения при тех наборах значений, входящих в выражение переменных, при которых его знаменатель не равен нулю.

Иррациональное выражение при нечётном показателе корня имеет значения при всех наборах значений, входящих в выражение переменных, а при чётном показателе — при тех наборах значений переменных, при которых его подкоренное выражение не меньше нуля.

Два выражения с одними и теми же переменными называются *тождественно равными*, если при всех наборах значений переменных из области определения соответствующие значения выражений равны.

Замена выражения тождественно равным ему выражением называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

Раскрытием скобок называется замена выражений $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ выражениями $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ соответственно.

Вынесением общего множителя за скобки называется замена выражений $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ выражениями $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ соответственно.

Поскольку $a - b = (a + (-b))$, то выражение, образованное из других выражений с помощью сложения и вычитания, можно записать как сумму, которая называется *алгебраической суммой*.

Если слагаемые алгебраической суммы одинаковые или отличаются только числовыми множителями, то их называют *подобными слагаемыми*. Замена суммы подобных слагаемых тождественно равным ей одним слагаемым называется *приведением подобных слагаемых*.

Целые выражения

Произведение чисел, переменных и их натуральных степеней называют *одночленом*.

Любой одночлен можно привести к *стандартному виду*, т. е. представить произведением числового множителя, записанного первым, и следующих степеней разных переменных. Этот числовой множитель называется *коэффициентом одночлена*. Сумма показателей степеней всех переменных одночлена называют *степенью одночлена*.

Произведение двух одночленов и натуральную степень одночлена можно заменить тождественно равным одночленом стандартного вида.

Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить коэффициенты, а показатели степеней одинаковых переменных сложить.

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень каждый из множителей.

Алгебраическую сумму одночленов называют *многочленом*.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена*. Одночлен также считают многочленом.

Многочлен из двух членов называют *двучленом*, а из трёх членов — *трёхчленом*.

Члены многочлена, отличающиеся только знаками своих коэффициентов, в сумме дают нуль, говорят, что они *взаимно уничтожаются*.

Многочлен, не имеющий подобных членов, которые все записаны в стандартном виде, называют *многочленом стандартного вида*.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду.

Сумму или разность любых многочленов можно выразить многочленом стандартного вида.

При решении обратной задачи — представлении многочлена суммой или разностью многочленов — пользуются правилами:

если при заключении в скобки членов многочлена перед скобками поставлен знак плюс, то члены в скобках записывают со своими знаками;

если при заключении в скобки членов многочлена перед скобками поставлен знак минус, то члены в скобках записывают с противоположными знаками.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо этот одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Чтобы многочлен разделить на одночлен, надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен.

Чтобы вынести общий множитель членов многочлена за скобки, надо:

– выделить этот общий множитель;

– делением членов многочлена на общий множитель найти многочлен, который записывается в скобках.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и записать сумму полученных произведений.

При преобразованиях целых выражений могут использоваться формулы сокращённого умножения:

$$\begin{array}{ll} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; & (a - b)(a + b) = a^2 - b^2; \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; & (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; \\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; & (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; & \end{array}$$

Каждое целое выражение можно представить многочленом стандартного вида. Целью преобразования целого выражения в большинстве случаев как раз и является приведение его к стандартному виду.

Иной раз приходится решать обратную задачу — представить многочлен стандартного вида произведением нескольких множителей-многочленов. Такое преобразование многочлена называют *разложением многочлена на множители*.

При разложении многочлена на множители используют способы: вынесения общего множителя за скобки; группировки; по формулам сокращённого умножения.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } 7t^3u - 21t^2u + 14t^3 - 42t^2 &\stackrel{(1)}{=} 7t^2(tu - 3u + 2t - 6) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} 7t^2((tu + 2t) - (3u + 6)) \stackrel{(3)}{=} 7t^2(t(u + 2) - 3(u + 2)) \stackrel{(4)}{=} 7t^2((u + 2)(t - 3)). \end{aligned}$$

Тут использовано: (1) — вынесение общего множителя $7t^2$ всех членов данного многочлена; (2) — группировка членов многочлена в скобках; (3) — вынесение общих множителей t и 3 многочленов в первых и вторых скобках соответственно; (4) — вынесение общего множителя $u + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } 4b^2 - 12bc + 9c^2 - 16k^2 &\stackrel{(1)}{=} (4b^2 - 12bc + 9c^2) - 16k^2 \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} (2b - 3c)^2 - (4k)^2 \stackrel{(3)}{=} (2b - 3c + 4k)(2b - 3c - 4k). \end{aligned}$$

Тут использовано: (1) — группировка членов многочлена; (2) — формула квадрата разности; (3) — формула разности квадратов.

Квадратный трёхчлен

Из целых выражений специально изучается *квадратный трёхчлен*, т. е. многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — определённые числа, x — переменная, причём $a \neq 0$.

Значения переменной x , при которых квадратный трёхчлен имеет своим значением число 0 , называются *корнями квадратного трёхчлена*.

Числа a, b, c называют *коэффициентами* квадратного трёхчлена, число a — *первым*, или *старшим*, *коэффициентом*, число b — *вторым коэффициентом*, число c — *свободным членом*.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом квадратного трёхчлена* и обозначают D , т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня x_1 и x_2 , которые выражаются через его коэффициенты следующим образом:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет корней.

Теорема Виета: если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема, обратная теореме Виета: если числа a, b, c, x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители: если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то истинно равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Рациональные выражения

Множество рациональных выражений составляют целые и дробно-рациональные выражения.

Любое рациональное выражение можно представить дробью $\frac{M}{N}$, где M и N — многочлены стандартного вида, причём многочлен N может быть числом. Такую дробь называют *рациональной дробью*.

Целью преобразований рационального выражения является чаще всего представление его рациональной дробью.

Правила действий над рациональными дробями такие же, как и над обыкновенными дробями. Вместе с этими правилами при преобразованиях рациональных выражений используются правила преобразования целых выражений, которые являются частями рационального выражения, а также свойства степени с целым показателем, в том числе и следующее:

$$\text{если } P \neq 0 \text{ и } Q \neq 0, \text{ то } \left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$\left(\frac{4x^2}{4x^2 + 4xy^2 + y^2} - \frac{2x}{2x + y}\right)^{-1} : \left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + (y - 2x)^{-1}\right)^{-2} + (2x - y)^{-2}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy^2 + y^2} - \frac{2x}{2x + y} = \frac{4x^2}{(2x + y)^2} - \frac{\frac{2x + y}{2x}}{2x + y} = \frac{4x^2 - 4x^2 - 2xy}{(2x + y)^2} = \\ & = \frac{-2xy}{(2x + y)^2}; \\ 2) \quad & \left(\frac{-2xy}{(2x + y)^2}\right)^{-1} = \frac{(2x + y)^2}{-2xy}; \\ 3) \quad & \frac{2x}{4x^2 - y^2} + (y - 2x)^{-1} = \frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} = \frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{1}{2x - y} = \\ & = \frac{2x - 2x - y}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{-y}{(2x - y)(2x + y)}; \\ 4) \quad & \left(\frac{-y}{(2x - y)(2x + y)}\right)^{-2} = \frac{(2x - y)^2(2x + y)^2}{y^2}; \\ 5) \quad & \frac{(2x + y)^2}{-2xy} : \frac{(2x - y)^2(2x + y)^2}{y^2} = \frac{(2x + y)^2 y^2}{-2xy(2x - y)^2(2x + y)^2} = -\frac{y}{2x(2x - y)^2}; \\ 6) \quad & -\frac{y}{2x(2x - y)^2} + (2x - y)^{-2} = -\frac{y}{2x(2x - y)^2} + \frac{1}{(2x - y)^2} = \frac{2x - y}{2x(2x - y)^2} = \\ & = \frac{1}{2x(2x - y)} = \frac{1}{4x^2 - 2xy}. \end{aligned}$$

Алгебраические выражения

Множество алгебраических выражений составляют рациональные и иррациональные выражения.

При преобразованиях алгебраических выражений используют правила действий над этими выражениями, свойства степени с рациональным показателем, в том числе и свойства радикалов.

Пример 4. Упростим выражение

$$(m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} + \frac{(m^2-n^2)^{-\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} - (m^2+mn)\left((m+n)^{-1}(m^{-1}-m^{-2}n)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы данное выражение имело значение, должна быть истинной система условий

$$\begin{cases} \frac{m-n}{m+n} \geq 0, \quad m+n \neq 0, \\ m^2-n^2 > 0, \\ m-n \neq 0, \\ \frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \geq 0, \quad m \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку истинно условие $m^2 - n^2 > 0$, т. е. условие $|m| > |n|$, то будут истинны и условия $m \neq 0$, $m+n \neq 0$ и $m-n \neq 0$, а значит, и условие $\frac{m-n}{m+n} \neq 0$, а также условие $\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \geq 0$. Поэтому система условий (1) равносильна системе

$$\begin{cases} |m| > |n|, \\ \frac{m-n}{m+n} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если $m > 0$, то из условия $|m| > |n|$ следует, что $m+n > 0$ и $m-n > 0$, а поэтому $\frac{m-n}{m+n} > 0$. А если $m < 0$, то из условия $|m| > |n|$ следует, что $m+n < 0$ и $m-n < 0$, и снова $\frac{m-n}{m+n} > 0$. Поэтому система условий (2) равносильна условию

$$|m| > |n|. \quad (3)$$

При дальнейшем упрощении данного выражения следует воспользоваться тождеством $|a|\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, поэтому такие упрощения придётся проводить отдельно для случаев $m > 0$ и $m < 0$.

Пусть $m > 0$, тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad (m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} &= \sqrt{\frac{(m+n)^2(m-n)}{m+n}} = \sqrt{(m+n)(m-n)}; \\ 2) \quad \frac{(m^2-n^2)^{-\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} &= \frac{m-n}{\sqrt{m^2-n^2}} = \sqrt{\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}; \end{aligned}$$

$$3) (m^2 + mn) \left((m+n)^{-1} (m^{-1} - m^{-2}n) \right)^{\frac{1}{2}} = m(m+n) \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{m^2(m+n)^2}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m^2 - n^2};$$

$$4) \sqrt{(m+n)(m-n)} + \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} - \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}.$$

Пусть $m < 0$, тогда:

$$1) (m+n) \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} = -\sqrt{\frac{(m+n)^2(m-n)}{m+n}} = -\sqrt{(m+n)(m-n)};$$

$$2) \frac{(m^2 - n^2)^{\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} = \frac{m-n}{\sqrt{m^2 - n^2}} = -\sqrt{\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}} = -\sqrt{\frac{m-n}{m+n}};$$

$$3) (m^2 + mn) \left((m+n)^{-1} (m^{-1} - m^{-2}n) \right)^{\frac{1}{2}} = m(m+n) \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{m^2(m+n)^2}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m^2 - n^2};$$

$$4) -\sqrt{(m+n)(m-n)} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} - \sqrt{m^2 - n^2} = -2\sqrt{m^2 - n^2} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$, если $m > 0$ и $|m| > |n|$; $-2\sqrt{m^2 - n^2} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$, если $m < 0$ и $|m| > |n|$.

Трансцендентные выражения

Из трансцендентных выражений вам известны тригонометрические выражения. При их преобразованиях используются определения тригонометрических функций и известные вам формулы, связывающие друг с другом синус, косинус, тангенс и котангенс одного угла, формулы приведения, формулы сложения и формулы двойного угла.

Пример 5. Упростим выражение $\frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha + 90^\circ) - 1} + \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha - 90^\circ) - 1}$.

Решение. 1. $\frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha + 90^\circ) - 1} = \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha)}{\sin^{-2}(90^\circ + \alpha) - 1} = \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha)}{\frac{1}{\sin^2(90^\circ + \alpha)} - 1} =$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha - 90^\circ) - 1} = \frac{\sin^2(90^\circ + \alpha)}{\cos^{-2}(90^\circ - \alpha) - 1} = \frac{\sin^2(90^\circ + \alpha)}{\frac{1}{\cos^2(90^\circ - \alpha)} - 1} = \\
 & = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha. \\
 3. \quad & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Уравнения и неравенства

Из двух выражений с переменными образуется формула, если выражения связать определённым отношением. В школьной алгебре изучаются отношения *равно*, *меньше*, *больше* и их отрицания — *не равно*, *больше или равно*, *меньше или равно*. В соответствии с этим из двух выражений A и B образуются формулы следующих видов:

$$A = B, A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B.$$

Формула, которая обращается в истинное высказывание при любых наборах значений входящих в неё переменных, называется *тождественно истинной формулой*, или *общезначаимой формулой*. Другие формулы называются *формулами-зависимостями*. Общезначаимые формулы-равенства называют ещё *тождествами*.

Формула-равенство $A = B$ называется *уравнением*, формулы-неравенства $A < B$, $A > B$, $A \neq B$, $A \geq B$, $A \leq B$ — *неравенствами с переменными*.

Областью определения формулы называется множество тех наборов значений переменных, входящих в выражения A и B , при которых имеют значения оба выражения A и B .

Число, обращающее уравнение в истинное высказывание, называют *корнем уравнения*.

Решить уравнение означает найти все его корни или установить, что их нет.

Число, обращающее неравенство с переменной в истинное высказывание, называют *решением неравенства*.

Решить неравенство означает найти все его решения или установить, что их нет.

Из формул образуются их системы и совокупности.

Системой формул называется формула, состоящая из двух или более формул и которая истинна при тех и только тех наборах значений переменных, при которых истинна каждая из формул.

Система, состоящая из формул A и B , обозначается $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

Совокупностью формул называется формула, состоящая из двух или более формул и которая истинна при тех и только тех наборах значений переменных, при которых истинна хотя бы одна из формул. Совокупность, состоящая из формул A и B , обозначается $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

Каждая пара значений переменных, которая удовлетворяет системе или совокупности формул с двумя переменными, называется *решением системы* или *совокупности*.

Решить систему или *совокупность* означает найти все её решения или установить, что их нет.

Решение уравнений, неравенств и их систем часто предусматривает сведение их к стандартным уравнениям или неравенствам. При этом полученные в результате преобразований уравнение, неравенство или система должны иметь те же решения, что и исходные уравнение, неравенство или система. В таком случае говорят о *равносильных* уравнениях, неравенствах, системах.

Преобразованиями равносильности уравнений или неравенств являются:

- перенос слагаемого из одной части уравнения или неравенства в другую с переменной его знака;
- умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число;
- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же положительное число;
- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число с заменой знака неравенства знаком противоположного смысла;
- возведение обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же нечётную степень.

При решении уравнений пользуются и преобразованиями *следования*, т. е. преобразованиями, при которых все корни данного уравнения являются корнями полученного уравнения. Примером преобразования следования является возведение обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же чётную степень. Преобразование следования может приводить к появлению *посторонних корней*, т. е. таких чисел, которые являются корнями полученного уравнения, но не являются корнями исходного. Поэтому при использовании преобразований следования обязательным этапом решения уравнения является *проверка* того, являются ли полученные числа корнями данного уравнения.

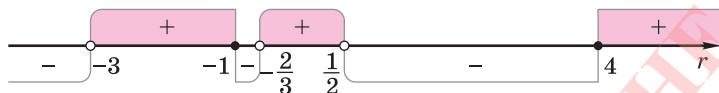
При решении уравнений и неравенств используются такие типовые приёмы, как *введение вспомогательной переменной*, *разложение на множители*, *перебор случаев*, *сведение к системе*, *использование графических представлений*, *использование свойств функций*. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Уравнение $\frac{15}{x^2 - x + 1} = (x - 1)^2 + x^2$ с введением переменной $y = x^2 - x + 1$ приводится к уравнению $\frac{15}{y} = y$.

Уравнение $x^2 \sin x + \cos x = x^2 \cos x + \sin x$ можно записать в виде $(x^2 - 1)(\sin x - \cos x) = 0$. Поэтому оно сводится к совокупности уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ \sin x - \cos x = 0. \end{cases}$$

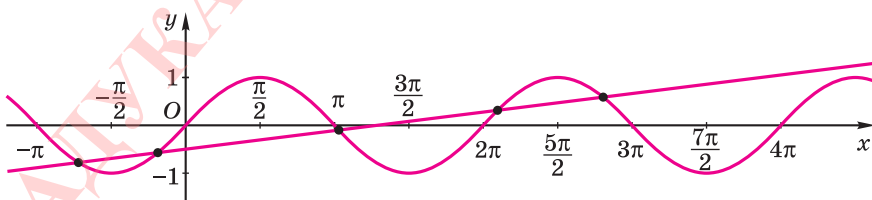
С разложением на множители связан *метод интервалов*, которым решаются рациональные неравенства. Неравенство $\frac{2}{t+3} + \frac{2}{3t+2} \geq \frac{3}{2t-1}$ сводимо к неравенству $\frac{(t+1)(t-4)}{(t+3)(3t+2)(2t-1)} \geq 0$, для которого метод интервалов даёт ответом множество $(-3; -1] \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup [4; +\infty)$.



При решении неравенства с модулем $|x+2| + |2x-5| < 7$ приходится рассматривать его на трёх промежутках $(-\infty; -2)$, $[-2; 2.5]$ и $(2.5; +\infty)$.

Уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ заменой $\begin{cases} \sqrt[3]{x+45} = a, \\ \sqrt[3]{x-16} = b \end{cases}$ сводимо к системе $\begin{cases} a-b=1, \\ a^3-b^3=61, \end{cases}$ которая равносильна системе $\begin{cases} a-b=1, \\ (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)=61 \end{cases}$ или системе $\begin{cases} a-b=1, \\ ab=20. \end{cases}$ Её решения $(5; 4)$ и $(-4; -5)$ позволяют получить решения данного уравнения: $x_1 = 80$ и $x_2 = -109$.

Чтобы ответить на вопрос о количестве корней уравнения $\sin x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$, удобно использовать графический способ решения уравнения. Построив графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$, замечаем, что они имеют 5 точек пересечения: по два на промежутках $(-\pi; 0)$ $(2\pi; 3\pi)$ и один — на промежутке $(\pi; 1.5\pi)$.

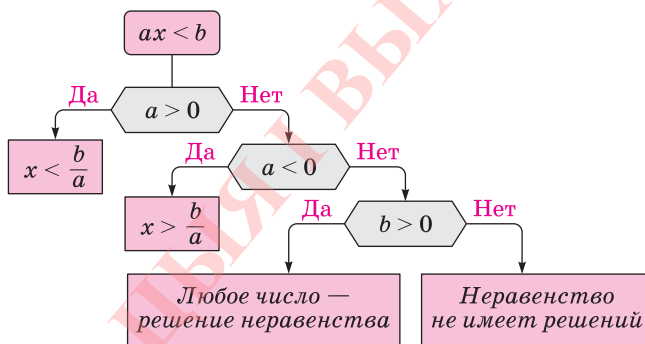


При решении уравнения $\sqrt{2x+5} - \sqrt[5]{3x-5} = 4-x$ подбором находим, что число 2 является корнем. Других корней уравнение не имеет, так как функция $y = \sqrt{2x+5} - \sqrt[5]{3x-5}$, определяемая левой частью уравнения, возрастает на области определения, а функция $y = 4-x$ убывает.

Сведения о решении линейных, квадратных, двухчленных и тригонометрических уравнений приведены в следующей таблице.

Уравнение	Корни	Уравнение	Корни
$ax = b$	$\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$	$\sin x = a$	$(-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, если $ a \leq 1$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если $D = b^2 - 4ac \geq 0$	$\cos x = a$	$\pm \arccos a + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, если $ a \leq 1$
$x^n = a$	$\sqrt[n]{a}$, если n — нечётное число; $\pm \sqrt[n]{a}$, если n — чётное число и $a \geq 0$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{arctg} a + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$
		$\operatorname{ctg} x = a$	$\operatorname{arcctg} a + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

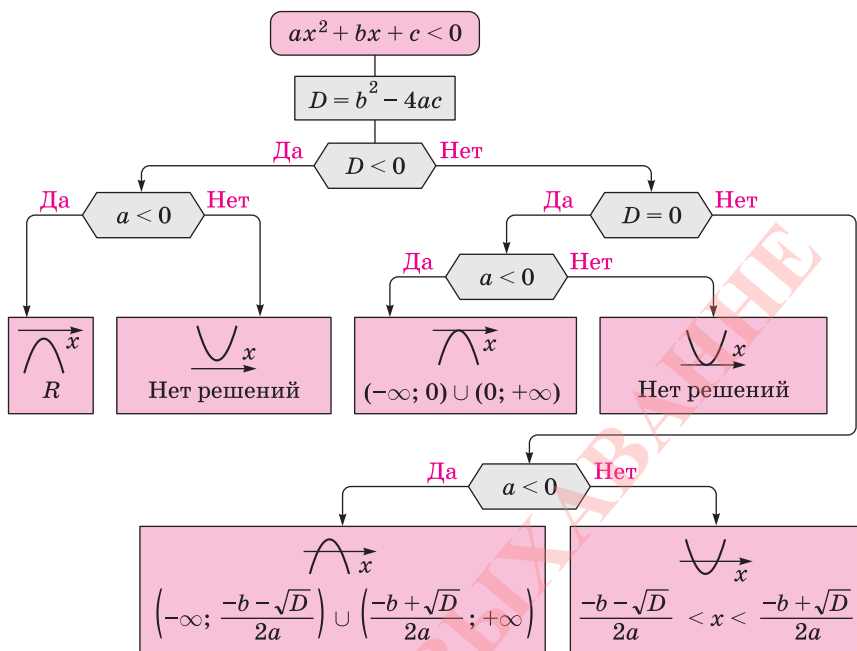
Сведения о решении линейных и квадратных неравенств даются схемами на с. 375 и 376 соответственно.



При решении систем уравнений стремятся уменьшить количество переменных и получить уравнение с одной переменной, которое позволяет найти её значения, а затем для каждого из полученных значений ищут значения остальных переменных. Исключить одну из переменных из системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно способом подстановки или способом алгебраического сложения.

Уравнение, неравенство или система могут содержать две или более переменных, причём одна из них считается переменной уравнения, а остальные рассматриваются как параметры, т. е. их значения считаются фиксированными. В таком случае говорят об *уравнении, неравенстве или системе с параметрами*.

Решить уравнение, неравенство или систему с параметрами означает для каждого набора значений параметров найти корни или решения соответствующих уравнения, неравенства или системы.



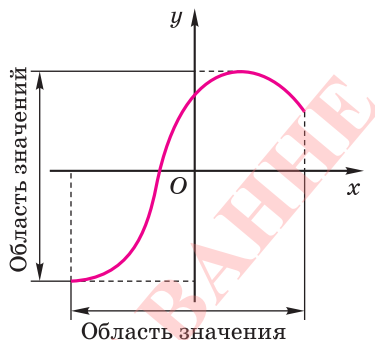
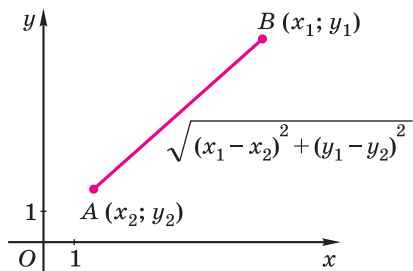
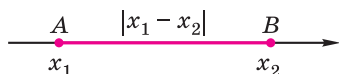
22. Координаты и функции

Если на прямой выбраны две точки O и E и с ними сопоставлены числа 0 и 1 соответственно, то говорят, что на прямой задана *система координат*, а саму прямую называют *координатной прямой*, или *координатной осью*. Точку O называют *началом координат*, а отрезок OE — *единичным отрезком*. Соответствие между точками координатной прямой и действительными числами взаимно однозначно: каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число, а каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Число x , соответствующее точке A координатной прямой, называют *координатой* этой точки и записывают $A(x)$.

Если на каждой из двух перпендикулярных прямых заданы системы координат с общим началом в точке O пересечения прямых, то говорят, что задана *система координат на плоскости*. Плоскость, на которой задана система координат, называется *координатной плоскостью*, одну из координатных прямых, обычно горизонтальную, называют *осью абсцисс*, другую — *осью ординат*. Соответствие между точками координатной плоскости и парами действительных чисел взаимно однозначно: каждой точке координатной прямой соответствует единственная пара действительных чисел, а каждой паре действительных чисел соответствует единственная точка координатной плоскости. Числа x и y пары $(x; y)$, соответствующей точке M координатной плоскости, называют *координатами* этой точки, причём первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*. Это записывают $M(x; y)$.

Если имеются точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то расстояние между ними выражает число $|x_1 - x_2|$, а если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то число

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Зависимость одной переменной y от другой x , при которой каждому значению переменной x из определённого множества D соответствует единственное значение переменной y , называется *функциональной зависимостью*, или *функцией*.

Функциональную зависимость переменной y от переменной x обозначают $y = f(x)$, или $y = y(x)$. При этом переменную x называют *аргументом* функции.

Множество тех значений, которые может принимать аргумент функции, называется *областью определения функции*, а множество тех значений, которые может приобретать зависимая переменная y — *областью значений функции*. Область определения функции $y = f(x)$ обозначают символом $D(y)$, а область значений — $E(y)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Арифметической прогрессией называется последовательность, у которой каждый следующий член получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа d , называемого *разностью прогрессии*. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой её член, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Формулы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ и } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

дают возможность найти n -ый член арифметической прогрессии и сумму n её первых членов.

Геометрической прогрессией называется последовательность, у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением

на одно и то же не равное нулю число q , называемое *знаменателем прогрессии*. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Для нахождения n -го члена геометрической прогрессии и суммы первых n её членов можно использовать формулы:

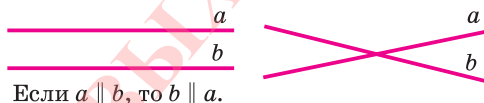
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ и } S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q называется число $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

ГЕОМЕТРИЯ

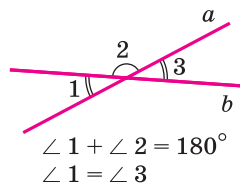
Две прямые

Две прямые a и b одной плоскости могут быть параллельными или пересекающимися.



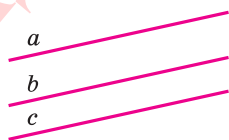
Если $a \parallel b$, то $b \parallel a$.

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла, пары которых имеют специальные названия. Углы 1 и 2, имеющие общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180° , а вертикальные углы равны друг другу.



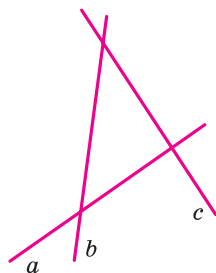
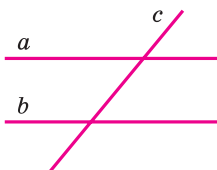
Три прямые

Среди трёх прямых a , b , c одной плоскости может не быть параллельных прямых или такие прямые могут быть. Если параллельные прямые a и b есть, то третья прямая c может быть параллельной им или пересекать их. Этим порождаются четыре конфигурации.



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

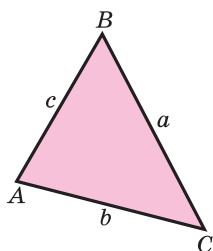
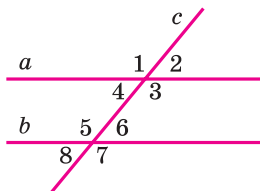
Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$.



Если две прямые a и b пересечены третьей прямой, то образуются 8 углов. Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*, углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренними односторонними*, углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренними накрест лежащими*.

Свойства параллельных прямых: если прямые a и b параллельны, то соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние вместе составляют 180° .

Признаки параллельных прямых: прямые a и b параллельны, если соответственные углы равны или внутренние накрест лежащие углы равны или внутренние односторонние вместе составляют 180° .



Треугольник

Три попарно пересекающиеся прямые выделяют из плоскости треугольник. Стороны и углы треугольника называют *элементами треугольника*.

Сумма внутренних углов равна 180° ; каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности; большему углу соответствует большая противолежащая сторона; большей стороне соответствует больший противолежащий угол; квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон и косинуса угла между ними (*теорема косинусов*); стороны пропорциональны синусам противолежащих углов (*теорема синусов*):

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ; |b - c| < a < b + c; |a - c| < b < a + c; |a - b| < c < a + b;$$

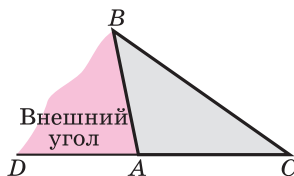
если $\angle A > \angle B$, то $a > b$; если $a > b$, то $\angle A > \angle B$;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Кроме сторон и углов в треугольнике выделяют и другие элементы.

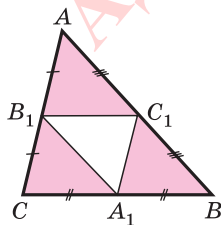
Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом.

Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним; $\angle BAD = \angle B + \angle C$.



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине; средние линии треугольника разделяют его на четыре равных треугольника:



$$A_1B_1 \parallel AB; A_1B_1 = \frac{1}{2} AB;$$

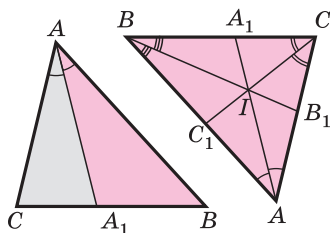
$$S_{A_1B_1C_1} = S_{AB_1C_1} = S_{BA_1C_1} = S_{CA_1B_1}.$$

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника и середину противолежащей стороны.

Медиана треугольника разделяет его на два равновеликих треугольника; медиана треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному; медианы треугольника пересекаются в одной точке, отсекающей от каждой из них третью долю, если считать от стороны; медианы треугольника разделяют его на шесть равновеликих треугольников:

$$S_{ABA_1} = S_{ACA_1}; \Delta MAN \sim \Delta CAB; A_1G = \frac{1}{3}AA_1, B_1G = \frac{1}{3}BB_1, C_1G = \frac{1}{3}CC_1;$$

$$S_{AGC_1} = S_{BGC_1} = S_{BGA_1} = S_{CGA_1} = S_{CGB_1} = S_{AGB_1}.$$



Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключённый между его вершиной и противолежащей стороной.

Биссектриса треугольника разделяет противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам; биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; точка пересечения биссектрис треугольника разделяет каждую биссектрису в отношении,

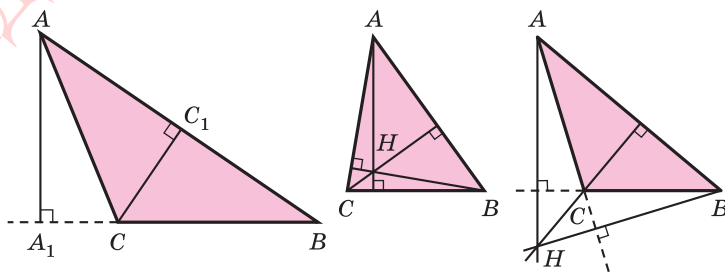
первый компонент которого — сумма сторон, заключающих биссектрису, второй компонент — третья сторона, если считать от вершины.

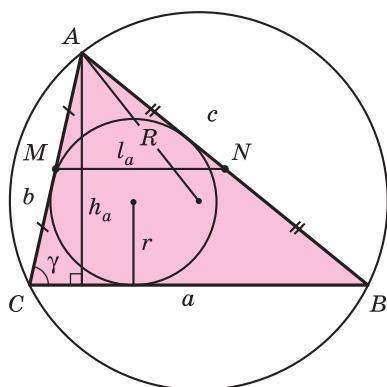
$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}; \frac{AI_1}{IA_1} = \frac{AB + AC}{BC}; \frac{BI_1}{IB_1} = \frac{BA + BC}{AC}; \frac{CI_1}{IC_1} = \frac{CA + CB}{AB}.$$

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через противолежащую его сторону.

Прямые, проходящие через высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведённой к ней высоты, или произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей средней линии, или половине произведения двух его





сторон и синуса угла между ними, или квадратному корню из произведения полупериметра и трёх разностей полупериметра с каждой стороной, или произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности, или произведению трёх сторон треугольника, разделённого на четвервёрный радиус описанной окружности:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; S = h_a \cdot l_a;$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C; p = \frac{1}{2} (a + b + c);$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; S = p \cdot r; S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

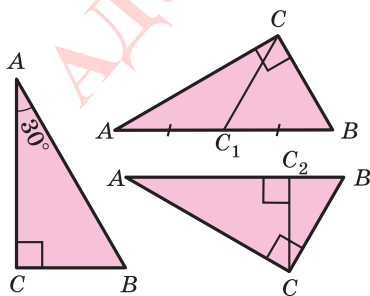
Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший — его угол может быть и острым, и прямым, и тупым. В соответствии с этим треугольники разделяют на *остроугольные, прямоугольные, тупоугольные*.

Гипотенуза — большая сторона прямоугольного треугольника, *катеты* — две другие его стороны.

Острые углы прямоугольного треугольника вместе составляют 90° ; квадрат его гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*); если катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы; если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° ; медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности; высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет является средним геометрическим гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу;

синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе; косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе; тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему; котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему:



$$\angle A + \angle B = 90^\circ; AB^2 = AC^2 + BC^2; CC_1 = AC_1 = BC_1 = R;$$

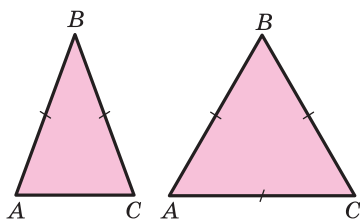
$$CC_2 = \sqrt{AC_2 \cdot BC_2}, AC = \sqrt{AB \cdot AC_2}, BC = \sqrt{AB \cdot BC_2} \sin A = \frac{BC}{AB};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}; \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

- сумма двух каких-нибудь его углов равна 90° ;
- квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;
- одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

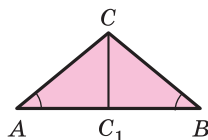
Равнобедренный треугольник



Если треугольник имеет равные стороны, его называют *равнобедренным*. Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним*.

Углы *равнобедренного треугольника* при основании равны; медиана, биссектриса, высота, проведённые к основанию, совпадают; медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым

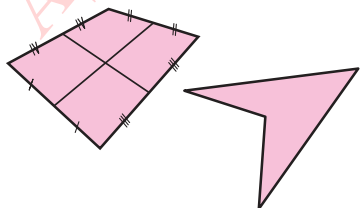
сторонам, равны друг другу; высоты равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны друг другу; биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны друг другу: $\angle A = \angle B$; если CC_1 — медиана, то CC_1 — биссектриса и высота; если CC_1 — биссектриса, то CC_1 — медиана и высота; если CC_1 — высота, то CC_1 — биссектриса и медиана.



Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

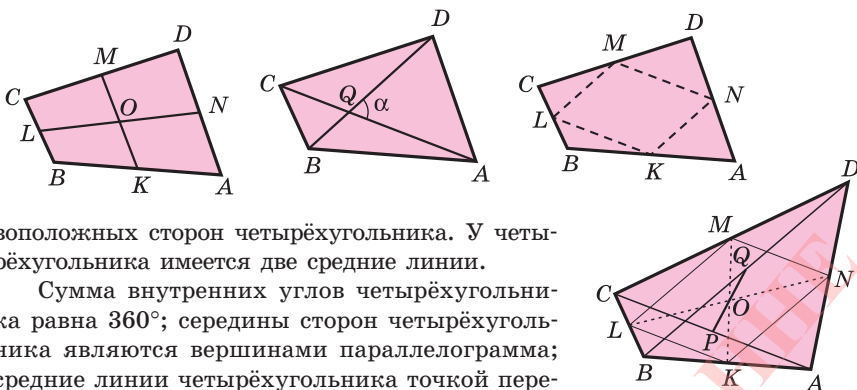
- две его стороны равны;
- два его угла равны;
- медиана и высота, или медиана и биссектриса, или высота и биссектриса, проведённые из одной вершины, совпадают.

Четырёхугольник



Плоская замкнутая четырёхзвенная ломаная выделяет из плоскости *четырёхугольник*. Различают *выпуклые* и *невыпуклые* четырёхугольники. Обычно рассматривают выпуклые четырёхугольники.

Средняя линия четырёхугольника — отрезок, соединяющий середины проти-



в противоположных сторон четырёхугольника. У четырёхугольника имеется две средние линии.

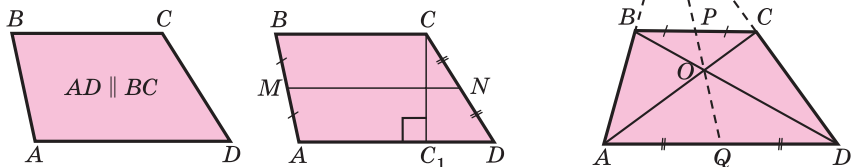
Сумма внутренних углов четырёхугольника равна 360° ; середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма; средние линии четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам; отрезок, соединяющий середины диагоналей четырёхугольника, проходит через точку пересечения его средних линий и делится ею пополам; площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними; из четырёхугольников, на которые средние линии разделяют четырёхугольник, сумма площадей двух четырёхугольников, прилежащих к противоположным вершинам, равна сумме площадей двух других четырёхугольников; из треугольников, на которые диагонали разделяют четырёхугольник, произведение площадей двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, равно произведению площадей двух других треугольников:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ; KLMN — \text{параллелограмм}; \\ OK &= OM; OL = ON; O \in PQ \text{ и } OP = OQ; S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha; \\ S_{AKON} + S_{CLOM} &= S_{BKOL} + S_{DMON}; S_{AQB} \cdot S_{CQD} = S_{AQD} \cdot S_{BQC}. \end{aligned}$$

Трапеция

Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Две параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, а две другие — **боковыми сторонами**.

Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° ; средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме; прямой, проведённой через середины оснований трапеции, принадлежат точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения прямых, проведённых через боковые стороны; из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, тре-



угольники, прилежащие к её основаниям, подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики; площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ; MN \parallel AD, MN \parallel BC,$$

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC); O \in PQ \text{ и } R \in PQ;$$

$$\triangle AOD \sim \triangle COB, S_{AOB} = S_{DOC}; S_{ABCD} = MN \cdot CC_1.$$

Признаки трапеции. Четырёхугольник является трапецией, если:

- он имеет параллельные стороны; $AD \parallel BC$ или $AB \parallel CD$;
- сумма углов, прилежащих к какой-нибудь стороне, равна 180° ;
 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, или $\angle B + \angle C = 180^\circ$, или $\angle C + \angle D = 180^\circ$, или $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

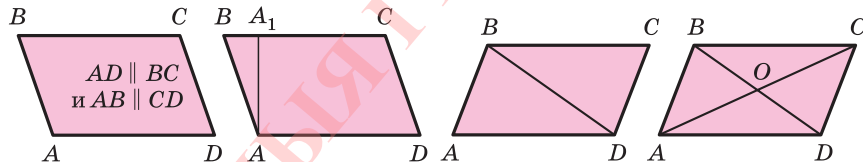
– отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, равен полусумме двух других его сторон; $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$

или $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD);$

– из четырёх треугольников, на которые диагонали разделяют четырёхугольник, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики; $S_{AOB} = S_{DOC}$ или $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Параллелограмм

Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны.



Сумма углов, прилежащих к любой стороне параллелограмма, равна 180° ; противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны; противоположные углы параллелограмма равны; диагональ параллелограмма разделяет его на два равных треугольника; диагонали параллелограмма разделяют его на две пары равных треугольников, а все четыре треугольника равновелики; точка пересечения диагоналей разделяет каждую из них пополам; точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма; площадь равна произведению стороны и проведённой к ней высоты:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ и } \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ и } \angle C + \angle D = 180^\circ, \text{ и } \angle D + \angle A = 180^\circ;$$

$$AD \parallel BC \text{ и } AB \parallel CD; AD = BC \text{ и } AB = CD; \angle A = \angle C \text{ и } \angle B = \angle D;$$

$$\triangle ABD = \triangle CBD; \triangle AOD = \triangle COB, \triangle AOB = \triangle COD,$$

$$S_{AOD} = S_{COB} = S_{AOB} = S_{COD}; AO = CO; BO = DO; S_{ABCD} = BC \cdot AA_1.$$

Признаки параллелограмма. Четырёхугольник является параллелограммом, если:

- суммы углов, прилежащих к каким-нибудь двум смежным сторонам, равны 180° каждая; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$, или

$\angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ$, или $\angle C + \angle D = 180^\circ$ и $\angle D + \angle A = 180^\circ$, или $\angle D + \angle A = 180^\circ$ и $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

- его противоположные стороны равны; $AD = BC$ и $AB = CD$;
- он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон; $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ или $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;
- его противоположные углы равны; $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;
- его диагонали точкой пересечения делятся пополам; $AO = CO$; $BO = DO$.

Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого есть прямой угол.

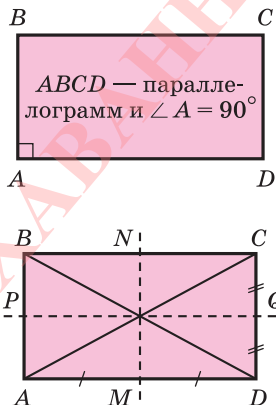
Все углы прямоугольника равны друг другу и прямые; диагонали прямоугольника равны; диагонали прямоугольника разделяют его на четыре равнобедренных треугольника; срединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника являются осями симметрии; площадь прямоугольника равна произведению смежных сторон:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ; AC = BD;$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD.$$

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

- его диагонали равны; $AC = BD$;
- срединный перпендикуляр к какой-нибудь стороне параллелограмма является его осью симметрии; MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.



Ромб

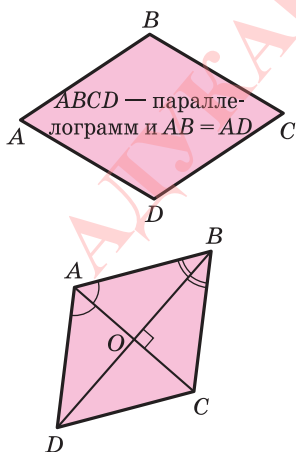
Ромб — параллелограмм, у которого есть равные смежные стороны.

Все стороны ромба равны друг другу; его диагонали перпендикулярны; диагонали ромба разделяют углы пополам; диагонали ромба разделяют его на четыре равных прямоугольных треугольника; прямые, которым принадлежат диагонали, являются осями симметрии ромба; площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$AB = BC = CD = DA; AC \perp BD; \angle ABD = \angle CBD \text{ и } \angle BCA = \angle DCA;$$

$$\triangle AOB = \triangle COB = \triangle AOD = \triangle COD; AC \text{ и } BD \text{ — оси симметрии ромба;}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$



Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

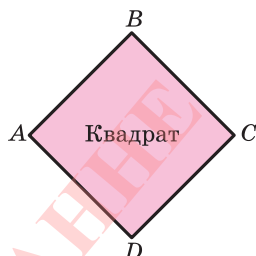
– он имеет пару равных смежных сторон; $AB = BC$, или $BC = CD$, или $CD = DA$, или $DA = AB$;

– его диагонали перпендикулярны; $AC \perp BD$;

– его диагонали делят углы пополам; $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;

– прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии.

$ABCD$ — прямоугольник и $AB = AD$



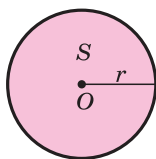
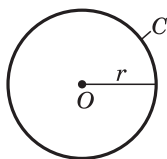
Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого есть равные смежные стороны, или ромб, у которого есть прямой угол.

Поскольку квадрат является и прямоугольником, и ромбом, то у него имеются все свойства прямоугольника и все свойства ромба.

$ABCD$ — ромб
и $\angle A = 90^\circ$

Окружность и круг



Отношение длины C окружности к её диаметру d есть одно и то же для любой окружности. Это отношение выражает число, которое обозначается π .

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113} \approx 3,14159.$$

Длины C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами:

$$C = 2\pi r; S = \pi r^2; S = \frac{C}{2} r.$$

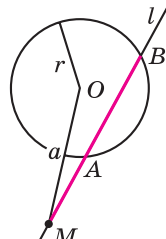
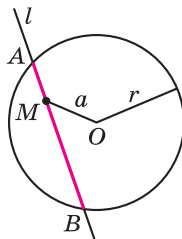
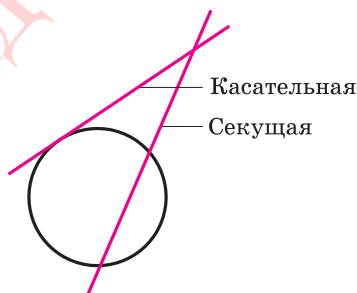
Окружность и прямая

Общих точек у окружности и прямой может быть не более двух.

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

Касательная перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.



$$MA \cdot MB = |a^2 - r^2|$$

Признак касательной. Прямая является касательной, если она проходит через точку окружности и перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку.

Если прямая проходит через данную точку и пересекает данную окружность, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения секущей с окружностью является величиной постоянной для любой такой прямой, причём если r — радиус окружности, a — расстояние от центра до выбранной точки и:

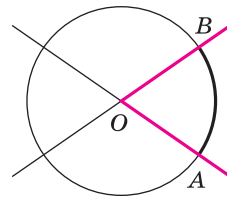
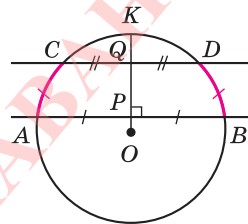
- точка лежит внутри окружности, то эта постоянная равна $r^2 - a^2$;
- точка лежит вне окружности, то эта постоянная равна $r^2 - a^2$.

Окружность и две прямые

Две параллельные прямые, каждая из которых имеет общие точки с окружностью, высекают из окружности равные дуги и равные хорды; если радиус окружности перпендикулярен к одной из параллельных хорд, то он перпендикулярен и к другой хорде и разделяет каждую из них на два равных отрезка:

$$\cup AC = \cup BD, AC = BD;$$

если $OK \perp AB$, то $OK \perp CD$ и
 $PA = PB$ и $QC = QD$.



$$\angle AOB = \cup AB$$

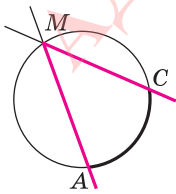
Пересекающиеся прямые относительно окружности могут располагаться так, что точка пересечения или совпадает с центром окружности, или лежит на окружности, или лежит внутри круга, или лежит вне круга.

Угол, вершина которого совпадает с центром окружности, называется *центральный угол*.

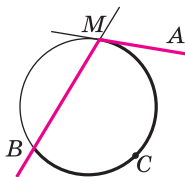
Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны имеют с окружностью общие точки, называется *вписанным углом*.

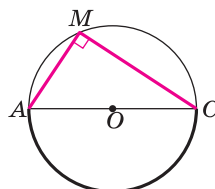
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



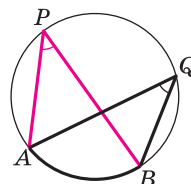
$$\angle AMC = \frac{1}{2} \cup AC$$



$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup BCM$$



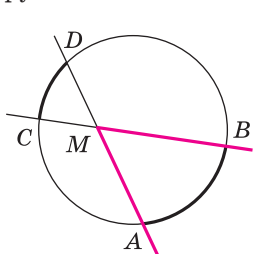
$$\angle AMC = 90^\circ$$



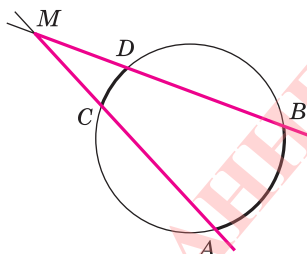
$$\angle APB = \angle AQB$$

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному.

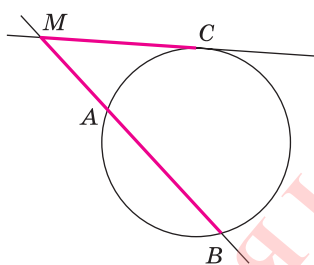
Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол высекает из окружности.



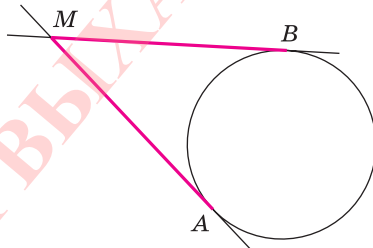
$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup CD)$$



$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup CD)$$



$$MA \cdot MB = MC^2$$



$$MA = MB$$

Если секущая и касательная проходят через данную точку вне круга, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения секущей с окружностью равно квадрату расстояния от данной точки до точки касания касательной к окружности.

Если через данную точку к данной окружности проведены две касательные, то расстояния от этой точки до точек касания равны друг другу.

Окружность и треугольник

Окружность, вписанная в многоугольник, — окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

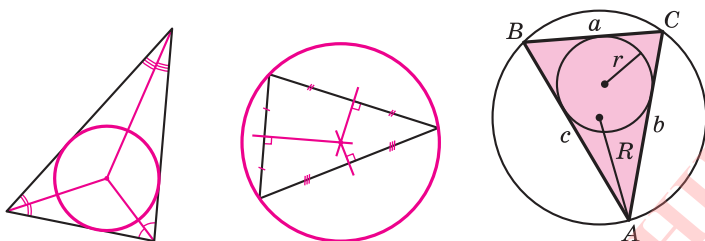
Окружность, описанная около многоугольника, — окружность, проходящая через все вершины многоугольника.

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения средних перпендикуляров к сторонам треугольника.

Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с другими элементами треугольника формулами:

$$r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}; \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



Окружность и четырёхугольник

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны.

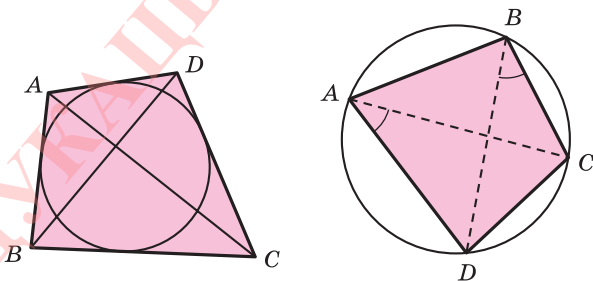
Признак описанного четырёхугольника. Четырёхугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон; $AB + CD = AD + BC$.

Суммы противоположных углов вписанного четырёхугольника равны 180° ; произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Признаки вписанного четырёхугольника. Четырёхугольник является вписанным в окружность, если:

а) сумма противоположных углов равна 180° ; $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

б) углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну и ту же сторону, равны; $\angle ACB = \angle ADB$, или $\angle BAC = \angle BDC$, или $\angle CAD = \angle CBD$, или $\angle ACD = \angle ABD$.



$$AD + BC = AB + CD$$

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Отношения между фигурами

Геометрические фигуры могут находиться в отношениях равенства и подобия.

Равные фигуры — фигуры, совпадающие при наложении.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- угол и прилежащие к нему стороны в одном углу и прилежащим к нему сторонам в другом;
- сторона и прилежащие к ней углы в одной стороне и прилежащим к ней углам в другом;
- три стороны в одном трём сторонам в другом.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- катеты в одном катетам в другом;
- катет и прилежащий к нему острый угол в одном катетам и прилежащему к нему острому углу в другом;
- гипотенуза и острый угол в одной гипотенузе и острому углу в другом;
- гипотенуза и катет в одной гипотенузе и катету в другом.

Теория подобия основывается на **теореме Фалеса**: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне высекают также равные отрезки.

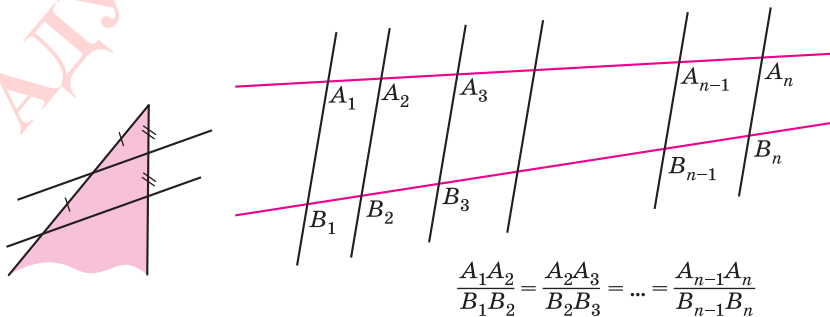
Истинна обобщённая теорема Фалеса: ряд параллельных прямых, пересекающих две другие прямые, высекают на них пропорциональные отрезки.

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответственные стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если у них:

- имеется по равному углу, а прилежащие к нему стороны пропорциональны;
- имеется по два равных угла;
- все три стороны пропорциональны.

Отношение любых соответственных линейных элементов подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объёмов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.



Отвѣты

Раздел I

9. 656 м². 10. $18(11+\sqrt{3})$ см². 11. $750(10+\sqrt{3})$ мм². 12. 1320 см².
13. а) 150; $12,5(12+\sqrt{3})$; б) 1200; 1400; в) 3456; $108(32+9\sqrt{3})$; г) 2000;
2000 + 640 tg 54°. 14. а) $2\sqrt{19}$ см; б) $9\sqrt{67}$ см²; в) $9(\sqrt{67}+\sqrt{3})$ см².
15. $4225\sqrt{3}$ мм². 16. а) $6\sqrt{13}$ см; $18\sqrt{3}$ см; б) $405\sqrt{3}$ см²; в) $648\sqrt{3}$ см².
17. а) $2\sqrt{82}$ см, $2\sqrt{73}$ см; б) $48\sqrt{73}$ см²; в) $144+48\sqrt{73}$ см².
18. $48(6-\sqrt{11})$ см². 19. а) $6\sqrt{34}$ см; 36 см; б) 2160 см²; в) 3456 см².
21. а) $2\sqrt{58}$ см; $2\sqrt{65}$ см; б) 296 см²; в) 392 см². 22. а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ м;
 $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ м; б) 192 м²; в) 282 м². 23. а) 5 м; $\sqrt{89}$ м; б) $8(5+\sqrt{34})$ м²;
в) $8(11+\sqrt{34})$ м². 24. а) $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{6}$ см; $8\sqrt{6}$ см; б) $192(1+\sqrt{2})$ см²;
в) $192(2+\sqrt{2})$ см². 25. а) 13 см; 12 см; б) 360 см²; в) $30(12+5\sqrt{3})$ см².
26. $150(2\sqrt{3}-3)$ см². 27. а) $12\sqrt{7}$ см; $12\sqrt{3}$ см; б) $1080\sqrt{3}$ см²;
в) $1728\sqrt{3}$ см². 28. $2,4\sqrt{34}$ см. 30. а) 168π см²; б) 168π см²; в) $2,4\pi$ м²;
г) $1,68\pi$ м². 31. 625π см². 32. 252π м². 33. π^2 м². 34. 4 см; 16 см.
35. 2,11 л. 36. 4,83 м². 37. $\frac{d^2}{8\pi}$. 38. $a : b$. 39. 37 мм. 40. 1040π см².
41. а) 75π см²; б) 288π дм²; в) $6,25\pi$ м². 42. а) $81\pi(3+2\sqrt{3})$ см²;
б) $200\pi(1+\sqrt{2})$ дм²; в) $4,32$ м². 43. 216°. 44. 12π см. 46. а) 88π см²;
б) 88π см²; в) 540π дм²; г) $3,24\pi$ м². 47. 36π см². 48. 144π м². 49. $50\pi^2$ м².
50. 12 см; 36 см. 51. $a : b$. 52. 30°, 60°. 53. 216. 54. $8 : 2\pi : 3\sqrt{3}$. 55.
6000. 59. 81 км/г. 60. 4. 61. 15 см и 24 см. 67. б) 4. 68. 1 или 3. 88.
 $\sqrt{10}$ см. 89. $4(5+3\sqrt{2})$ см. 90. 72 дм². 91. $576(1+\sqrt{3})$ см². 92. 11 мм и
60 мм. 93. 4640 см² или 8448 см². 94. 4 см. 95. 960 см². 96. 4 см.
115. 12. 116. а) $m + n$, $\frac{m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{n(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$; б) $m + n$, $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$,
 $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 117. 6 см, 3,36 см. 121. 7 м, 9 м и 16 м или $8\frac{5}{23}$ м, $10\frac{5}{23}$ м
и $18\frac{8}{23}$ м. 122. 18 см и 10 см. 123. 2 ч, 3 ч. 129. в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м².
130. $\frac{a}{9}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$. 132. $l\sqrt{2a^2-\frac{l^2}{4}}$. 133. 72 см². 134. $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$.

135. $20\sqrt{3}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм. 136. $\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt[4]{3}}$. 142. $\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$.
 146. $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-2)$, $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. 147. $\frac{a}{2}(2\sqrt{3}+1)$, $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. 150. $\frac{\sqrt{7}(6-\sqrt{3})}{66}$.
 151. $1,25a^2\sqrt{3}$. 152. 10 мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм. 153. $2\sqrt{2}S(1+\sqrt{3})$.
 156. $2R^2\sqrt{3}$. 157. $3l^2$. 158. $2\sqrt{3}$ м². 159. $\frac{1}{2a\sqrt{2}}\sqrt{a^4+4S^2}$.
 160. $2a^2\left(2\sqrt{\frac{\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}+1\right)$. 161. $\frac{3c}{8}\sqrt{8h^2+c^2}$. 162. $\frac{4}{3}(\sqrt{13}+\sqrt{10})$ м.
 163. 480 см². 165. $2\sqrt{2(4Q^2-a^4)}$. 166. $\sqrt{8Q^2+a^4}$. 176. 11- и 7-угольник.
 177. 14 км/ч. 178. 20 см. 179. 24 конфеты.

Раздел II

216. а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; б) $\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$; в) a^3+b^3 ; г) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$.
 217. а) $\frac{2}{(5x+1)(5x-1)^2}$; б) $\frac{3}{2(9-4y^2)}$; в) $\frac{ab}{a+b}$; г) $\frac{8}{m^2-4}$. 218. а) $2-\sqrt{3}$;
 б) $\sqrt{5}+2$; в) $\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$; г) $\frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$. 219. а) -2; б) $\sqrt{ab}$; в) $-\frac{a+b}{a-b}$;
 г) $4\frac{x}{y}-2$. 223. 18 кг·м/с, 42 кг·м/с. 224. 6 м/с, 24 м/с. 233. а) -0,25;
 б) -1; в) $-\frac{1}{16}$. 234. г) $-\frac{2}{y^3}$. 235. а) $4c^3$; б) $2c+3\sqrt{c}+1$; в) $-\frac{3}{(c-2)^2}$;
 г) $-\frac{1}{(c-1)^2}$; д) $1-\frac{1}{(c+1)^2}$; е) $\frac{-1+8c-2c^2}{(2c^2-1)^2}$; ж) $\frac{4c}{(c^2+1)^2}$; з) $-\frac{3c^2}{(c^3+1)^2}$;
 и) $3c^2+2c+2-\frac{2}{c^2}-\frac{2}{c^3}$; к) $7c^6+1+\frac{1}{c^2}+\frac{7}{c^8}$; л) $3c^2-6c-8+\frac{3\sqrt{c}}{2}+\frac{4}{c\sqrt{c}}$;
 м) $\frac{-\sqrt{c}-2}{6\sqrt[3]{c^2}(\sqrt{c}-1)^2}$. 236. а) $2-y$; б) $\sqrt{2-y^2}$; в) $2-\left(\frac{y}{y-3}\right)^2$; г) $1-\frac{3}{y^2+1}$;
 д) $\sqrt{\frac{y}{y-3}}$; е) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y-3}}$. 238. а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=\frac{1}{x}$; г) $f(x)=\frac{x}{2}$;
 д) $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)$; е) $f(x)=-\sqrt{x-1}$. 239. а) $28(2y-7)^{13}$; б) $50(3+5y)^9$;

в) $-21(7y-1)^{-4}$; г) $-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}y+2\right)^{-6}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2y+3}}$; е) $\frac{5}{2\sqrt{5y-8}}$; ж) $-\frac{2}{\sqrt{7-4y}}$;

з) $\frac{4a}{\sqrt{4a^2-1}}$; и) $\frac{a}{\sqrt{3a^2+63}}$; к) $\frac{9a}{\sqrt{9a^2-16}}$; л) $65(5e-2)^{12} - 60(3e+7)^{19}$;

м) $45(3e-2)^{14} + 8(3e-1)^3$; н) $\frac{3}{\sqrt{6e-8}} - \frac{4e}{\sqrt{4e^2-3}}$; п) $-\frac{9a^2}{2\sqrt{7-3a^3}}$.

240. а) $7(m-3)^6$; б) $27(3m-4)^8$; в) $-8(1-2m)^3$; г) $-5(1-m)^4$; д) $2m-1$;

е) $-\frac{9}{(3m+1)^4}$; ж) $-\frac{18}{(3m+2)^4}$; з) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{m}}$; и) $-\frac{1}{2\sqrt{-m}}$; к) $\frac{5}{2\sqrt{5m-1}}$;

л) $\frac{5(m+2)^4}{2\sqrt{(m+2)^5}}$; м) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2m-7)^2}}$. 241. а) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)^4$; б) $\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$;

в) $\frac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$; г) $12(x+1)^3((x+1)^4-2)^2$; д) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}}$;

е) $-\frac{x^2-1}{2(x^2+1)\sqrt{x^3+x}}$. 254. 43 см; 22 см. 261. а) $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$,

$(\sqrt[3]{3}; +\infty)$. 263. д) На $(-3; 3)$ убывает; е) на $(0; 2)$ убывает; ж) на $(-3; 1)$

убывает; з) везде убывает. 264. д) Везде возрастает; е) на $(-2; 2)$ убывает; ж) на $(-1; 1)$ возрастает; и) везде возрастает; к) возрастает на $(-1; 0)$ и на $(1; -\infty)$; л) убывает на $(-\infty; 3)$; м) возрастает на $(-2; +\infty)$. 265. а) Возрастает

на $(0; 0,5)$ и на $(1; +\infty)$; б) убывает на $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; в) убывает на $(-1; 0)$ и

на $(0; 1)$; г) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$; д) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1)$; е) убывает на $(-\infty; -1)$, на $(-1; 1)$ и на $(1; +\infty)$; ж) возрастает на $(-1; 1)$; з) возрастает на $(1; 2)$ и $(2; 4)$; и) убывает на $(-1; 1)$; к) убывает на

$(-1; 0)$; л) убывает на $(0; \frac{1}{4})$, возрастает на $(\frac{1}{4}; +\infty)$; м) возрастает на

$(0; +\infty)$. 273. а) 2; б) 1; в) ± 2 ; г) $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$; д) ± 1 ; е) ± 2 . 275. д) $y_{\min} = y(-2) =$

$= -16$, $y_{\max} = y(2) = 16$; е) $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(4) = -32$; ж) $y_{\max} =$

$= y(-1 - \sqrt{5}) = \frac{29+10\sqrt{5}}{3}$, $y_{\min} = y(-1 + \sqrt{5}) = \frac{29-10\sqrt{5}}{3}$; з) $y_{\max} = y(-2) =$

$= 69$, $y_{\min} = y(5) = -274$. 281. б) $a = 0$ — точка минимума; в) крити-

ческих точек нет; г) критические точки 0, ± 2 ; $a = 0$ — точка мини-

мума. 282. д) Убывает на $(-\infty; \frac{1}{4})$ и на $(\frac{1}{4}; +\infty)$; е) возрастает на

$(-\infty; -2)$ и на $(-2; +\infty)$; ж) возрастает на $(0; 3,2)$ и убывает на $(-\infty; 0)$

и на $(3, 2; +\infty)$; з) убывает на $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$ и на $\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, возрастает на $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$, $(2; +\infty)$; $t_{\max} = t\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -3\sqrt{3}$, $t_{\min} = t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$. 283. а) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(8; 12)$, возрастает на $(0; 8)$ и на $(12; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $(0; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(2; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и на $(1; 2)$. 286. $y_{\max} = y(13)$. 287. $y_{\max} = y(-3)$. 288. $a = 1$. 291. а) $(-1; 0) \cup (1; 3)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $\left[\frac{1}{3}; 8\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; 0,5)$. 292. а) 0; 6; б) -3. 295. 14 кг и 22 кг или 11,4 кг и 24,6 кг. 296. 3 м/с и 21 м/с или $4\frac{6}{7}$ м/с и $19\frac{1}{7}$ м/с. 301. а) $f_{\text{наиб.}} = f(0) = 3$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = -3$; б) $f_{\text{наиб.}} = f(1) = 3$; $f_{\text{наим.}} = f(-2) = -6$; в) $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 14$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$; г) $f_{\text{наиб.}} = f(3) = 18$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = -2$; д) $f_{\text{наиб.}} = f(1) = f(4) = 2$; $f_{\text{наим.}} = f(2) = 1$; е) $f_{\text{наиб.}} = f(2,25) = 0,75$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$. 302. а) $f_{\text{наиб.}} = f(\pm 4) = 105$; $f_{\text{наим.}} = f(\pm\sqrt{5}) = -16$; б) $f_{\text{наиб.}} = f(3) = 169$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = 1$; в) $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 3375$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = -1$; г) $f_{\text{наиб.}} = f(2) = \frac{2}{3}$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$. 303. а) $f_{\text{наиб.}} = f(1) = 82,5$; $f_{\text{наим.}} = f(3) = 40,5$; б) $f_{\text{наиб.}} = f(-3) = -4$; $f_{\text{наим.}} = f(-5) = -5\frac{1}{3}$. 304. а) $f_{\text{наиб.}} = 27 = f_{\text{наим.}}$; б) $f_{\text{наиб.}} = 4 < 12 = f_{\text{наим.}}$. 305. а) $f_{\text{наиб.}} = f(0) = -9$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = f(-1) = -16$; б) $f_{\text{наиб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = -16$; в) $g_{\text{наиб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{наим.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{наиб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{наим.}} = g(1) = -11$; г) $u_{\text{наиб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{наиб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{наиб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{наим.}} = u(2) = 4$; г) $v_{\text{наиб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{наим.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{наиб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{наим.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{наиб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{наиб.}} = f(0) = 1$;

$f_{\text{наим.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{наиб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{наим.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{наиб.}} =$
 $[-1; 3]$ $[-1; 3]$ $[0; 2]$
 $= f(1) = 3 \frac{1}{3}$; $f_{\text{наим.}} = f(2) = -3 \frac{1}{3}$; д) $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 1$; $f_{\text{наим.}} = f(0) = \frac{1}{3}$;
 $[0; 2]$ $[0; 2]$ $[0; 2]$
 е) $f_{\text{наиб.}} = f(4) = 4,25$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = 2$; ж) $f_{\text{наиб.}} = f(0,25) = 0,25$; $f_{\text{наим.}} =$
 $[0,5; 4]$ $[0,5; 4]$ $[0; 4]$ $[0; 4]$
 $= f(4) = -2$; з) $f_{\text{наиб.}} = f(9) = 3$; $f_{\text{наим.}} = f(1) = -1$; и) $f_{\text{наиб.}} = f(1) = 19$;
 $[0; 9]$ $[0; 9]$ $[-1; 1]$
 $f_{\text{наим.}} = f\left(\frac{1}{7}\right) = 5 \frac{38}{49}$; к) $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 15$; $f_{\text{наим.}} = f(-0,5) = -35$.
 $[-1; 1]$ $[-0,5; 3]$ $[-0,5; 3]$
309. При $a < -1$ и при $a > 1$. **310.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 2. **311.** а) 1; б) $\sqrt[3]{2}$;
 в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **312.** а) $8 + 8$; б) $6 \cdot 6$. **314.** 8 см и 8 см. **315.** $5 + 5$. **316.** $4 + 4$.
318. а) $6 + 2$; б) $12 + 24 + 18$. **319.** 50 м · 100 м. **320.** $2\sqrt{6}$ км.
321. 350 м^2 и 250 м^2 . **322.** $MX = \frac{1}{2\sqrt{3}} AB$. **323.** $0,5a$, $0,5h$. **325.** 60° .
326. $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **327.** а) $4 \cdot 4 \cdot 2$; б) $3 \cdot 6 \cdot 2$. **328.** 2 см, 2 см.
329. $10 \cdot 10 \cdot 5$. **330.** $R = H$. **331.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **332.** $\sqrt[3]{4SQ^2}$. **333.** За 1 км
 до В. **334.** а) 3; б) 1 и -2; в) таких точек нет; г) 0 и 1. **335.** а) -8; б) 1;
 в) 12; г) 2. **336.** а) -1; б) 1. **337.** а) $c = \frac{1}{4}$; б) $c = \frac{1}{12}$. **338.** а) $4x - y - 2 = 0$;
 б) $4x + y + 2 = 0$; в) $4x - 2y - 1 = 0$; г) $8x + 8y + 1 = 0$. **339.** $x + 2y -$
 $-4 = 0$. **340.** $x + y - 1 = 0$. **341.** а) $3x + 16y - 2 = 0$; б) $3x + y - 2 = 0$.
342. (2; -4). **343.** (1; 1), (-1; -1). **344.** а) (1; 0,5), (-1; -0,5); б) (0; 0);
 в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; г) $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **345.** $y = 4x + 1$ и
 $y = -2x - 7$; $y = -2x + 4$ и $y = 4x - 8$. **346.** $y = 0$ и $x = 0$, 90° ; $y = 2x - 1$
 и $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $\arctg \frac{3}{4}$. **347.** а) (0,5; 0,25), (3,5; 8,75); б) $x + y = 1$,
 $y = 7x + 17$. **349.** а) $\approx 1,004$. **350.** а) $\approx 0,6838$; б) $\approx 0,588$. **351.** а) $\approx 2,03$;
 б) $\approx 22,44$; в) $\approx 2,39$; г) $\approx 10,03$. **352.** а) $\approx 30,018$; $\approx 0,58$; б) $\approx 23,568$;
 $\approx -1,05$; в) $\approx 190,13$; $\approx 1,36$; г) $\approx 59,08$; $\approx 11,76$. **353.** $\approx 1,03$; $0,05 \%$.
355. а) $\approx 1,002$; б) $\approx 5,001$; в) $\approx 0,997$; г) $\approx 0,996$; д) $\approx 5,10$; е) $\approx 7,00$;
 ж) $\approx 3,98$; з) $\approx 9,04$. **356.** а) $\approx 0,94$; б) $\approx 1,08$; в) $\approx 1,0078$; г) $\approx 0,99$;
 д) $\approx 2,72$; е) $\approx 1,79$. **361.** 2968 ц. **362.** 3055 ц, 3500 ц.

Раздел III

370. а) 7 см; б) 30 см. **371.** б) 200 см. **372.** 50 см. **373.** 40 мм.
384. а) 40° ; б) 45° ; в) 90° . **385.** а) 58° ; б) 47° . **386.** а) 90° ; б) 64° .
388. В 5 раз. **391.** $1,5 + \sqrt{2}$ см; $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ см². **392.** 36 см. **393.** 40 м или 8 м.

394. 20 см. 395. 12 см. 396. 24 см. 398. 49 см. 399. б) 12 см. 400. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см.

401. $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$. 403. а) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}}$; б) $y' = \frac{3\sqrt{s}}{2}$; в) $y' = -\frac{3}{2s^2\sqrt{s}}$; г) $y' = 2s + \frac{2}{3\sqrt[3]{s}}$.

404. а) Везде возрастает; б) возрастает на $(2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$;

в) возрастает на $(-\infty; -3)$ и на $(4; +\infty)$, убывает на $(-3; 4)$. 405. а) Экстремумов нет; б) при $a \leq 0$ экстремумов нет; при $a > 0$ максимум в точке $x = -\sqrt{a}$ и минимум в точке $x = \sqrt{a}$; в) при $a \geq 0$ минимум в точке $x = 0$; при $a < 0$ максимум в точках $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ и минимум в точке $x = 0$;

г) при $a \geq 0$ экстремумов нет; при $a < 0$ максимум в точке $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$ и минимум в точке $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$. 414. 48 ц/га; 32 ц/га. 415. 54 мм и 48 мм, 48 мм и 31 мм. 416. 41 см²; 23 см². 440. 96 см. 441. $8\frac{1}{3}$ см. 442. 24 см.

445. 4S. 446. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 447. $\frac{1}{3}m$. 448. б) 1600 см². 449. $\frac{\sqrt{S}}{4}$. 450. б) 5 см.

452. 10 см. 453. 24 см; 36 см. 454. 25 см. 455. 16 см. 458. $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$.

459. 1620 см². 460. а) $y' = \frac{5\sqrt[3]{s^2}}{3}$; б) $y' = -\frac{1}{4\sqrt[4]{s^5}}$; в) $y' = \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{s^2}$;

г) $y' = \frac{3s+2}{2\sqrt{s}}$. 462. а) $y = c$; б) $y = -0,5x + c$; в) $y = -x^2 + c$; г) $y = x^2 + x + c$;

д) $y = x^3 + c$; е) $y = -x^3 - 5x + c$. 464. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$.

465. 10 г, 18 г. 466. 10 г, 16 г. 467. 20 м/с, 22 м/с. 468. 20 м/с, 25 м/с.

477. б) 12 см². 482. а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. 485. а) $2\sqrt{136-45\sqrt{5}}$;

$3\sqrt{106-21\sqrt{5}}$; 29; б) $45\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{189}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 210. 486. б) 4:9.

487. в) 6 см². 495. б) 4 см. 497. 8 см². 507. 46 см. 510. 109 см. 511. 6S.

512. б) 140 см. 513. $\frac{q}{16}$. 514. 64 см². 515. 72 см. 516. 38 см. 517. $\frac{4}{3}S$.

518. $\frac{5}{4}Q$. 519. $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. 520. 0,16 q. 521. 1 : 3. 522. $\frac{9m}{64}\sqrt{4n^2-m^2}$.

523. 32 см². 526. а) $y' = 4s^3 + 12s^2 - 2s + 2$; б) $y' = 4s^3 + 4s^2 - \frac{5}{s^2}$;

в) $y' = 7s^6 + \frac{7}{s^8}$; г) $y' = -\frac{8s^2+10}{s^{11}}$. 527. а) Убывает на $(-\infty; \frac{2}{3})$, возрастает на $(\frac{2}{3}; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$, убывает на $(1; 5)$; в) убыва-

ет на $(-\infty; -2)$ и на $(0; 2)$, возрастает на $(-2; 0)$ и на $(2; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; 1)$. **531.** а) $(0; 1)$ и $(-1; -1)$; б) $(1; 1)$, $(-2; -1)$. **535.** 38 ц/га, 45 ц/га. **536.** 17 см, 50 см. **537.** 2 см, 5 см.

Раздел IV

- 577.** а) 8; б) 10; в) 13; г) 21. **578.** $\frac{768}{49}(9-4\sqrt{2})$ см². **579.** $81\sqrt{3}$ см².
- 580.** 1152 см². **581.** $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. **582.** 94 см². **583.** $\frac{a}{3}$. **584.** $7\sqrt{3} - 12$.
- 586.** 21 ц/га. **587.** 37 км. **588.** 196 м², 464 м². **589.** $\frac{3}{4}$ ml. **619.** а) 132° , 120° , 48° , 60° ; б) 12° ; в) 84° . **621.** 0,6. **622.** $1 + \operatorname{ctg} \alpha + 0,5 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
- 624.** 70 км/ч. **625.** 24 км и 25 км. **626.** 117 см² или 207 см². **634.** в) $\frac{\pi}{7}$;
- г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\pi - x$; е) $\pi - x$. **638.** а) 0,6; б) -0,8; в) $\sqrt{2\sqrt{6}-4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **639.** а) 0,4;
- $\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\frac{2}{\sqrt{21}}$; $\frac{\sqrt{21}}{2}$; б) -0,8; 0,6; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$. **644.** а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $\frac{4\pi}{5}$;
- д) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{4\pi}{5}$. **647.** а) 0,5; б) нет корней; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **652.** в) $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$;
- г) не существует. **655.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $4\pi - 12$; в) $4\pi - 12$. **661.** а) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$;
- б) $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$; в) $+\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{5}$; $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **663.** а) $\frac{\pi}{2} - 2$;
- б) $\pi - 2$; в) $4\pi - 10$; г) $3\pi - 10$. **666.** а) 1; б) $\frac{\pi}{7}$. **667.** а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{6\pi}{7}$; в) $\frac{3\pi}{4}$.
- 668.** а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; д) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; е) $-\frac{5}{\sqrt{11}}$. **669.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $4\pi -$
- -11 ; в) $8 - 2\pi$; г) $10 - \frac{5\pi}{2}$; д) $\frac{3\pi}{10}$; е) $\frac{9\pi}{10}$. **670.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
- г) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **671.** а) $-\frac{16}{65}$; б) $\frac{77}{85}$; в) $-3\frac{15}{16}$; г) 0; д) $\frac{33}{65}$; е) $-\frac{16}{63}$.
- 679.** а) $\operatorname{arctg} \frac{56}{33}$; б) $-\operatorname{arctg} \frac{16}{63}$; в) $-\operatorname{arctg} \frac{39}{95}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{84}{13}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $\frac{\pi}{4}$.
- 680.** а) $\arccos \left(-\frac{140}{221}\right)$; б) $\arccos \left(-\frac{36}{325}\right)$; в) $\arccos \frac{63}{65}$; г) $\arccos \left(-\frac{119}{169}\right)$;
- д) $\arccos \frac{36}{85}$; е) $\arccos \left(-\frac{36}{97}\right)$. **682.** а) $\arccos 0,3$; б) $\arcsin \frac{4}{11}$; в) $\operatorname{arctg} 3$;

р) $\operatorname{arccctg} h$. **684.** а) 0; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) 0. **686.** а) $\frac{161}{289}$; б) $\frac{13}{85}$;
 в) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$; г) $\frac{36}{85}$. **687.** а) $mn - \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}$; г) $\frac{k\sqrt{1-l^2} + l\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{(1-k^2)(1-l^2)} - kl}$;
 д) $2p\sqrt{1-p^2}$; е) $\frac{2j}{1-j^2}$; ж) $\frac{1-h^2}{1+h^2}$; з) $\frac{2g}{1+g^2}$; и) $\frac{f^2-1}{f^2+1}$; к) $\sqrt{\frac{1+d}{2}}$;
 л) $\frac{s}{1+\sqrt{1+s^2}}$; м) $\sqrt{1+t^2} - t$. **696.** а) $\sqrt{R^2+S} \pm \sqrt{R^2-S}$; б) $\frac{S}{2r} + \frac{r}{2} \pm$
 $\pm \sqrt{\left(\frac{S}{2r} - \frac{r}{2}\right)^2 - S}$; в) $\sqrt{S\left(\frac{S}{h^2} + 1\right)} \pm \sqrt{S\left(\frac{S}{h^2} - 1\right)}$; г) $\sqrt{m^2+2S} + \sqrt{m^2-2S}$,
 $0,5(\sqrt{m^2+2S} - \sqrt{m^2-2S})$ или $\sqrt{m^2+2S} - \sqrt{m^2-2S}$, $0,5(\sqrt{m^2+2S} + \sqrt{m^2-2S})$;
 д) $\frac{S\sqrt{2}}{l} \pm \sqrt{\frac{2S^2}{l^2} - 2S}$. **697.** В $\frac{25}{6\pi}$ раз. **698.** $32\sqrt{3}$ или $64\sqrt{3}$. **699.** 96 км/ч,
 72 км/ч. **700.** 16 см, 25 см. **704.** а) $\frac{1}{\cos a}$; б) 13; в) 0; г) $\frac{2}{|\sin t|}$. **706.** а) $\cos c$;
 б) $\operatorname{tg} x$; в) $\cos 4\beta$; г) 1; д) $\operatorname{tg} c$; е) $\cos 2y$. **709.** б) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) -1.
710. а) $\sin 80^\circ$; б) $-\cos 20^\circ$; в) $\cos 2\beta$; г) $\cos 2\gamma + \sin 2\gamma$; д) $\cos^2 2\varphi$;
 е) $\frac{1}{1+\sin 2\beta}$. **714.** а) $\frac{2}{\sin x}$; б) $2 \operatorname{ctg} y$; в) $2 \operatorname{tg} a$; г) $\operatorname{ctg} \alpha$. **715.** $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$.
716. а) $1,5\pi$; б) π ; в) 0; г) $1,5\pi$. **717.** а) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$; $-3\frac{3}{7}$; б) $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$;
 в) $\frac{1}{119}$; г) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-\frac{1}{119}$; д) $-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{3}$. **719.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{2\sqrt{46}}{25}$;
 г) $-\frac{4\sqrt{82}}{49}$; д) $1\frac{7}{8}$; е) $-\frac{9}{40}$. **721.** а) $2 \cos \beta$; б) если $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} 2\beta >$
 $> 2 \operatorname{tg} \beta$; если $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} 2\beta < 2 \operatorname{tg} \beta$. **722.** а) 0; б) 0; в) $\pm \frac{\pi}{4}$.
723. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{13\pi}{12}$; в) 2π . **725.** а) $2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
728. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **729.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{14}}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{3}{\sqrt{10}}$; -3. **731.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\frac{\sqrt{2}}{10}$; 7; в) $-\frac{5}{\sqrt{34}}$; $-\frac{3}{\sqrt{34}}$; $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$.

732. а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}-1$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2-\sqrt{3}$;
 р) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$; д) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$;
 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}-2$; е) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$. 733. 0,8; 0,6. 735. а) 0,8; б) $\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$; в) -2. 737. а) $\frac{5\pi}{3}$;
 б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $\frac{14\pi}{3}$. 739. а) 0,6; $\pm 0,8$; б) $\frac{40}{41}$; $\pm \frac{9}{41}$; в) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$. 740. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\sqrt{5}+1$. 741. а) $\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$;
 б) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2y + \frac{1}{8} \cos 4y$; в) $\frac{1}{32}(2 - \cos z + 2 \cos 2z - \cos 3z - 2 \cos 4z)$.
 744. д) $\sin x$; е) $\cos x$; ж) $\cos x$; з) $\sin x$. 746. а) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 5^\circ$; б) $-\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$;
 в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$. 747. а) $2 \cos 22^\circ \sin 39^\circ$; б) $\sqrt{2} \sin 5^\circ$; в) $\sqrt{2} \cos\left(b-\frac{\pi}{4}\right)$;
 е) $4 \cos 2x \cos^2 1,5x$. 748. а) $-4 \cos \beta \sin^2 \frac{\beta}{2}$; б) $4 \sin 2\gamma \cos\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;
 в) $-4 \cos 2z \sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; д) $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; е) $\operatorname{ctg} 4a$.
 749. а) $\sin(a+b) \sin(a-b)$; б) $\sin(a+b) \sin(b-a)$; в) $-\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$; г) $\cos 4^\circ \cos 36^\circ$; д) $\sin 2q \sin 8q$; е) $-\cos(y+z) \cos(y-z)$.
 752. а) $\sqrt{2} \cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2} \cos\left(k-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;
 р) $2 \sin\left(\frac{k}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{k}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $4 \cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $4 \cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 761. г) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; д) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. 762. в) $2 \sin^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;
 р) $2 \sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; д) $2 \operatorname{tg} a \sin^2 \frac{a}{2}$; е) $2 \operatorname{ctg} b \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)$; ж) $2 \operatorname{tg} a \cos^2 \frac{a}{2}$;
 з) $2 \operatorname{ctg} x \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; и) $\cos 2a$; к) $-\cos 2b$; л) $4 \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)$; м) $4 \sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 763. а) k ; б) $\frac{t^2-s^2}{t^2+s^2}, \frac{2ts}{t^2+s^2}$.

769. 2208 ц; 900 ц. 770. 336 см³; 423 см³. 771. 112 см³; 108 см³.
 780. $-\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. 781. а) 0; б) $-2\operatorname{ctg} x$; в) 0; г) $\operatorname{ctg}^2 t$; д) $-\sin^3 a$; е) -1 .
 782. а) $\cos \beta$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$. 783. а) $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{3}$; б) $\frac{19}{70}$; в) 11; г) 2.
 784. а) 1; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0; д) 0; е) 1; ж) 0; з) 1; и) -3 ; к) 0.
 786. а) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}$; б) $\sin 2a$; в) 1; г) 1; д) $2\cos 4a - 1$; е) $\operatorname{tg} 2r$; ж) $2|\operatorname{ctg} y|$;
 з) $|\sin x - \sin y|$; и) $2\left|\sin \frac{u-v}{2}\right|$; к) -4 ; л) $\operatorname{tg} p (2\sin 2p - 1)$. 789. а) $2 - \sqrt{2}$;
 б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $8\sqrt{3}$; г) 2. 790. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 1,5; д) 9; е) 3. 791. а) $-\frac{1}{2}$;
 б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{2}$; д) 1; е) $\frac{3}{2}$. 792. а) $-\frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{7a}{2}}{2\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)}$;
 б) $-2\cos\left(2b + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $-8 \cos 2c$; г) $\sin^2(z - t)$; д) 4; е) $\sin 2x \sin 2y$;
 ж) $\frac{\sin d \sin \frac{9d}{2}}{\sin \frac{3d}{2}}$; з) $\operatorname{tg}(i - j) \operatorname{tg}(j - k) \operatorname{tg}(k - i)$; и) 3; к) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + e\right)$. 796. а) $\frac{3}{16}$;
 б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 3; д) -7 ; е) 2,25. 797. а) 2; б) $\frac{3t^2 - 1}{2}$; в) 1; г) $a^4 - 4a^2 + 2$;
 д) 0; е) $-\frac{3}{2}$. 799. а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{44}{125}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 5,5; д) $-\frac{119}{120}$; е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. 800. а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
 б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\sqrt{\frac{3}{11}}$. 802. $\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$. 803. а) 0; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{1}{8}$;
 д) $\frac{\sqrt{2}}{512}$. 804. г) $\frac{3}{4} \sin 4t$; д) $\operatorname{tg} 5a$; ж) $\sqrt{5}$. 807. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 814. 1,5 ч. 815. 42 м.

Раздел V

826. $\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{2}}$. 827. $4\sqrt{17}$ см или $4\sqrt{65}$ см; 32 см; 20 см. 838. 40 см.
 839. 7,8 м. 840. 18 см. 845. б) $90^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 90^\circ$. 847. $9\sqrt{2}$ см².
 849. 6,5 см. 850. а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2 - p^2 + r^2}$; г) $\sqrt{l^2 - k^2 + 2m^2}$.

851. 15 см. 852. 15 см. 853. 12 см. 854. а) 1,8; б) $2\frac{5}{12}$; в) 3. 855. 36 см.
 856. 3200 мм². 857. 23 см. 858. $36\sqrt{5}$. 859. 296 см². 860. 60 см, 36 см.
 861. 20 см, 24 см. 862. 12 см. 864. а) 1250; б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000.
 866. а) 4; 1; б) $4; 1$; в) $2 + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2 + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2 + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 868. а) $\{-1\} \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup [3; 7]$; в) $(-\infty; -1) \cup [1 - \sqrt{2}; 0) \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$; г) $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$. 869. а) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; б) $[-2; 1]$.
 873. а) 1; б) -24. 875. 25 кг. 876. 20 %, 60 %. 883. а) $\frac{d}{\cos \beta}$, $d \operatorname{tg} \beta$;
 б) $m \cos \beta$, $m \sin \beta$. 884. а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. 885. 6 см, 15 см. 886. а) 41 см,
 55 см; б) 40 см, 80 см. 887. $\sqrt{2}$ м. 888. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{5+3\cos \beta}{2}}$. 889. 3 см;
 7,5 см. 890. 20 см. 897. $12,5\sqrt{337}$ см². 898. 10 см, 6 см. 899. $\frac{mp}{p+q}$ или
 $\frac{mq}{p+q}$. 900. 60 см. 901. 120 см. 902. а) 56; б) 20. 903. а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$;
 в) условие противоречивое. 904. 270 см². 908. 12 см, $4\sqrt{10}$ см. 909. 16 см,
 34 см. 912. 12,5 см, 25 см. 915. 8 дм, 17 дм, $\sqrt{176,5}$ дм.
 916. $\sqrt{m^2 \sin^2 \beta + n^2}$. 917. б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + h^2}$. 918. 7,5 см. 919. 5 см.
 920. 20; $5\sqrt{3}$. 921. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. 922. 40 см, 16 см. 923. $\sqrt{2y^2 - x^2}$.
 924. 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, $2,5\sqrt{17}$ см. 925. 18 м и 12 м. 926. $16(3 + \sqrt{17})$.
 927. 6 см. 929. а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. 930. 30°. 931. а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$.
 932. а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. 934. $3d$. 936. 45°. 937. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 938. 45°. 939. $5\sqrt{5}$ мм. 941. $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. 942. а) a ; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 943.
 $\frac{abc}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2) + 4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2) + 4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2}}$. 944. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 945. $\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$. 946. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 947. $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2 - a^2}$. 954. 36 мм, 50 мм, 60 мм,
 $2\sqrt{769}$ мм; 60 мм, 30 мм, 20 мм, 50 мм. 955. 1440 мм²; 2816 мм².

973. 10 см. 974. 27 см. 975. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 976. $2l^2$. 977. а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.
 978. 3,36 см. 979. а) $8\sqrt{3}$ см; б) $112\sqrt{3}$ см². 980. 4 м. 981. 90°, 45°, 60°. 982. 60°. 983. а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. 984. $a\sqrt{2}$. 985. $\arccos \frac{1}{3}$. 986. 60°. 988. $\sqrt{217}$ см. 989. $2a$. 990. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 991. $\sqrt{c^2+d^2+l^2}$; $\sqrt{c^2+l^2}$; $\sqrt{d^2+l^2}$.
 992. 6 см. 993. а) 42 см; б) 16 см; в) $2x$. 994. 60°. 995. 60°. 996. 120°. 997. $\frac{a}{2}$. 998. 27 дм². 999. 90°; 90°; $\arccos 0,6$. 1000. $\arccos \frac{1}{3}$.
 1001. $\arccos \frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}$; $\arccos \frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$. 1002. $\arccos \left(-\frac{1}{3}\right)$; $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 1003. $\arccos \frac{a}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; $\arccos \frac{a^2}{a^2-4b^2}$. 1005. а) $-\frac{71}{43}$; б) $-\frac{1}{83}$.
 1007. а) $\frac{2\sin 41^\circ}{\cos 19^\circ}$; б) $\frac{\sqrt{2}\cos 16^\circ}{\sin 29^\circ}$; в) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}-z\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+z\right)}{\cos^2 z}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+b\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-b\right)$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+b\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-b\right)$; е) $-\sin\left(\frac{\pi}{6}+u\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-u\right)$.
 1008. а) $4\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$; б) $4\cos\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;
 в) $2\sqrt{2}\cos\frac{g}{2}\cos\left(\frac{g}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. 1009. а) $-\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$;
 б) $\frac{\cos\frac{k+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 1010. а) -2,4; -1,2; б) 0; -7 + 2 $\sqrt{3}$; в) -1; -401,6;
 г) -2; 4. 1011. а) $(-\infty; 1)$; б) $(-1; -0,5) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (4; +\infty)$ г) x — любое число. 1012. 240 Вт; 2310 Вт. 1013. 1600 Вт; 320 Вт.

Раздел VI

1027. а) $[0; 1]$; б) $[-1; 0]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right]$; г) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$;
 е) $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 1037. 20 см. 1038. 60 см. 1039. 9 см. 1040. 14 см.
 1041. а) 15 см; б) 75 см². 1042. 350 см². 1043. а) 15 см, 13 см; 9 см, 5 см; б) 364π см², 70π см²; в) $2\sqrt{14}$ см, $2\sqrt{14}$ см. 1044. а) 10 см, 6 см; 20 см, 9 см; б) 96π см², 261π см²; в) 8 см, $\sqrt{319}$ см. 1058. а) $[-1; 0]$;

- б) $[-1; 0]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.
1072. а) $2a\sqrt{1-a^2}$; б) $1 - 2a^2$; в) $\sqrt{1-a^2}$; г) $\sqrt{1-4a^2}$. 1075. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$.
1077. б) $130\sqrt{3}$. 1079. 20 см, 25 см; 480 см², 900 см². 1080. 216 км, 324 км; 72 км/ч, 36 км/ч. 1114. а) $\frac{1+3a}{1-3a}$; б) $\frac{3a-4a^3}{(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}}$;
- в) $\frac{4a^3-3a}{(4a^2-1)\sqrt{1-a^2}}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $4a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2}$. 1115. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- б) 1; в) нет корней; г) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. 1116. 4 см. 1117. 13 см. 1118. $20\sqrt{2}$.
1119. $\sqrt{2a^2-b^2}$; $\sqrt{b^2-a^2}$. 1120. $72\sqrt{3}$ см². 1122. 12 см, 18 см.
1123. 15 км/ч, 12 км/ч. 1133. а) 4π ; б) 2π ; в) -3π ; г) 4π . 1134. $\frac{4\sqrt{69}}{3}$ см.
1135. $\frac{a\sqrt{l^2+a^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$. 1136. 2,5 см. 1137. $\sqrt{z^2+y^2-\frac{y^4}{x^2}}$. 1139. 25 см, 15 см. 1143. а) Нет корней; б) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- г) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) нет корней; е) нет корней.
1144. а) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- г) $\pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
1145. а) $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) нет корней; в) $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; г) $(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{39}-3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{arctg} 1,5 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; е) $\operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} 4 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
- ж) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 1146. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; в) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- $\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- е) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm \arccos 0,2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; и) $\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; к) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **1147.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; г) $-\arctg \frac{5}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $-\arctg \frac{1}{2} + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{1}{2} \arctg 1,5 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; з) $\arctg \sqrt{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **1148.** а) $\frac{\pi}{4} +$
 $+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg 0,5 + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg \frac{2}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\arctg \frac{\sqrt{6}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 ж) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
1149. а) $\arctg 0,5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\arctg 0,5 + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{1}{2} \arctg \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{1}{2} \arctg 0,5 + \frac{\pi n}{2},$
 $n \in \mathbb{Z}$. **1150.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\arctg (-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi,$
 $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 3,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. **1151.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{m+1} 2\pi + 12\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \pi + 8\pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg 0,5 + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **1152.** а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 г) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; ж) $\pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; и) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; к) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; л) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; м) $\frac{\pi}{8} k + \pi n, k = 0, 1, 2, 3, 5,$
 $6, 7, n \in \mathbb{Z}$. **1153.** а) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 г) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
 ж) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 и) $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; к) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$. **1154.** а) $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$;

$(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; р) $\frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi(2m+1)}{5}, m \in \mathbb{Z}$. **1155.** а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}$.
1156. а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 2,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 е) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **1157.** а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
 е) $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) нет корней.
1158. а) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **1159.** а) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
 б) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **1160.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $2 \arctg -2 \pm \sqrt{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $2 \arctg \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $-2 \arctg (4 + \sqrt{15}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 ж) $2 \arctg \sqrt{7} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $-\frac{5\pi}{12} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **1161.** а) Нет корней;
 б) нет корней; в) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) нет корней; д) нет корней;
 е) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) нет корней; з) нет корней.
1162. а) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) нет корней; в) нет корней; г) $20\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 д) нет корней; е) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1164. а) Нет корней; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
 д) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}r + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, r = 0, 2, 3, 4$. 1165. 102 см².
 1166. 17 см. 1167. 12 м. 1168. 1,5а. 1169. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 1170. а) $\sqrt{d^2 - m^2}$;
 б) $\sqrt{m^2 - l^2}$; в) $\frac{l}{m} \sqrt{m^2 - l^2}$. 1171. а) 30 см, 45 см; б) 42 см, $62\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.
 1172. 64 кг, 36 кг. 1189. а) 17; -17; б) 17; -17; в) 13; -13; г) 30; -20;
 д) $\sqrt[4]{2}$; 0; е) не существует; 0,5. 1197. 10; -6. 1199. 105π. 1200. а) $[0; 1]$,
 $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\mathbb{R}$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $[-1; 1]$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;
 д) $\mathbb{R}$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$; ж) $[0; 1]$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
 з) $\{0\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; и) $\mathbb{R}$, $\{0\}$. 1201. а) $2\sqrt{73}$ м; б) 14 м. 1202. а) $\sqrt{d^2 - \frac{1}{3}}$;
 б) $\sqrt{d^2 - 6,25}$; в) $\sqrt{d^2 - \frac{64}{7}}$. 1203. а) $\sqrt{d^2 - 1}$; б) $\sqrt{d^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$;
 в) $\sqrt{d^2 - 2 - \sqrt{3}}$. 1204. $\frac{5}{6}(\sqrt{61} - 5)$ см. 1205. 60°. 1206. 113 см.
 1207. 58,2 кг; 25,0 кг.

Содержание

РАЗДЕЛ I.

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ 4

1. Пространственные фигуры 4
2. Прямые и плоскости 20
3. Построение сечений многогранников 36

РАЗДЕЛ II.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ 49

4. Производная 49
5. Правила нахождения производных 62
6. Исследование функции с помощью производной 74
7. Применения производной 86

РАЗДЕЛ III.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ 101

8. Взаимное расположение прямых в пространстве 101
9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве 115
10. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 124

РАЗДЕЛ IV.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ 140

11. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольных
углового и числового аргументов 140
12. Формулы сложения. Формулы приведения 158
13. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс 171
14. Применения формул сложения 191
15. Преобразования тригонометрических выражений 209

РАЗДЕЛ V.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ 226

16. Перпендикулярность прямой и плоскости 226
17. Расстояния. Угол между прямой и плоскостью 240
18. Перпендикулярность плоскостей 260

РАЗДЕЛ VI.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 275

19. Функция $y = \sin x$ 275
20. Функция $y = \cos x$ 289
21. Функция $y = \operatorname{tg} x$ 300
22. Простейшие тригонометрические уравнения 315
23. Тригонометрические уравнения 325
24. Тригонометрические функции 337

Справочный материал 353

Ответы 391

(Название и номер учреждения образования)			
Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Отметка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

Математика

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Редактор	<i>Т. К. Слаута</i>
Художник обложки	<i>В. К. Желудкова</i>
Художник	<i>А. Л. Латотин</i>
Компьютерный набор	<i>Е. П. Шатило</i>
Компьютерная вёрстка	<i>Е. П. Шатило</i>
Корректор	<i>Т. К. Слаута</i>

Подписано в печать 28.06.2013. Формат 60×90 ¹/₁₆.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,2+0,3 форз. Уч.-изд. л. 18,7+0,3 форз.
Тираж 5335 экз. Заказ

РУП «Издательство “Адукацыя і выхаванне”».
ЛИ № 02330/639 от 31.01.2012.
Ул. Будённого, 21, 220070, г. Минск.

ООО «Принтхаус».
ЛП № 02330/0552738 от 02.02.2010.
Ул. Одоевского, 117, 220015, г. Минск.

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"